PRODUIT SCALAIRE DE DEUX VECTEURS DU PLAN

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan est le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
($\vec{u} \cdot \vec{v}$ se lit « vecteur $\vec{u}$ scalaire vecteur $\vec{v}$ ».)

I) Calculer le produit scalaire de deux vecteurs

Il faut utiliser l'une des expressions suivantes.

- Expression du produit scalaire en fonction des normes des vecteurs :

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est le nombre : $\frac{1}{2}\left[\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2\right]$.

- Expression analytique du produit scalaire :

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, de coordonnées (x; y) et (x'; y') dans un repère orthonormal, le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est le nombre : $x \times x' + y \times y'$.

- Expression géométrique du produit scalaire :

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, formant un angle $\left(\vec{u}\ ;\vec{v}\right)$, le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est le nombre :

$$\left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \cos\left(\vec{u}\ ;\vec{v}\right).$$

Remarques : - si $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ alors l'angle $\left(\vec{u}\ ;\vec{v}\right)$ est aigu.

- si $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ alors l'angle $\left(\vec{u}\ ;\vec{v}\right)$ est obtu.

- Le carré scalaire d'un vecteur est le carré de sa norme : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2$.

II) Propriétés du produit scalaire

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ et pour tout nombre α réel :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad ; \quad \alpha\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right) = \alpha\vec{u} \cdot \vec{v} \quad ; \quad \vec{u} \cdot \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

III) Montrer que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont orthogonaux

Si le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. ($\vec{u} \perp \vec{v}$).

IV) Application à la trigonométrie

$$\cos(a + b) = \cos(a)\times\cos(b) - \sin(a)\times\sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a)\times\cos(b) + \sin(b)\times\cos(a)$$