



EXERCICES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1

Déterminer le module et l'argument des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + j ; z_2 = -4 + 3j ; z_3 = 4 ; z_4 = -1 - j ; z_5 = 2 - 3j ;$$

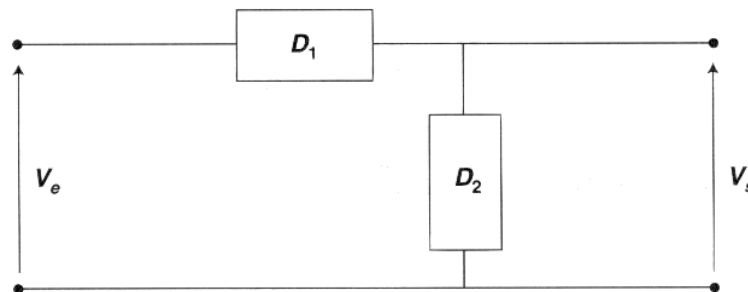
Écrire sous la forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$z_6 = 1 + 2j ; z_7 = 2 + 4j\sqrt{3} ; z_8 = 1 - j\sqrt{2}$$



Exercice 2

On considère le filtre passe-bas dont le modèle est représenté par la figure suivante.



Le dipôle D_1 est purement résistif de résistance R (en ohms).

Le dipôle D_2 est purement capacitif de capacité C (en farads)

En régime harmonique permanent de pulsation ω .

- L'impédance complexe du dipôle D_1 est $\underline{Z}_1 = R$.

- L'impédance complexe du dipôle D_2 est $\underline{Z}_2 = \frac{1}{jC\omega}$

j désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

L'étude du filtre conduit alors à considérer le nombre complexe : $\underline{T} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$

1) Montrer que l'on a $\underline{T} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$

2) On suppose pour la suite que $R = 10^4 \Omega$, $C = 10^{-5} \text{ F}$ et $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

Vérifier que dans ces conditions : $\underline{T} = \frac{1}{1 + j}$

3) Donner l'écriture algébrique du nombre \underline{T} .

4) Calculer le module du nombre \underline{T} .

5) Calculer un argument du nombre \underline{T} .



(D'après sujet de Bac Pro Équipements et Installations Électriques Session 1996)



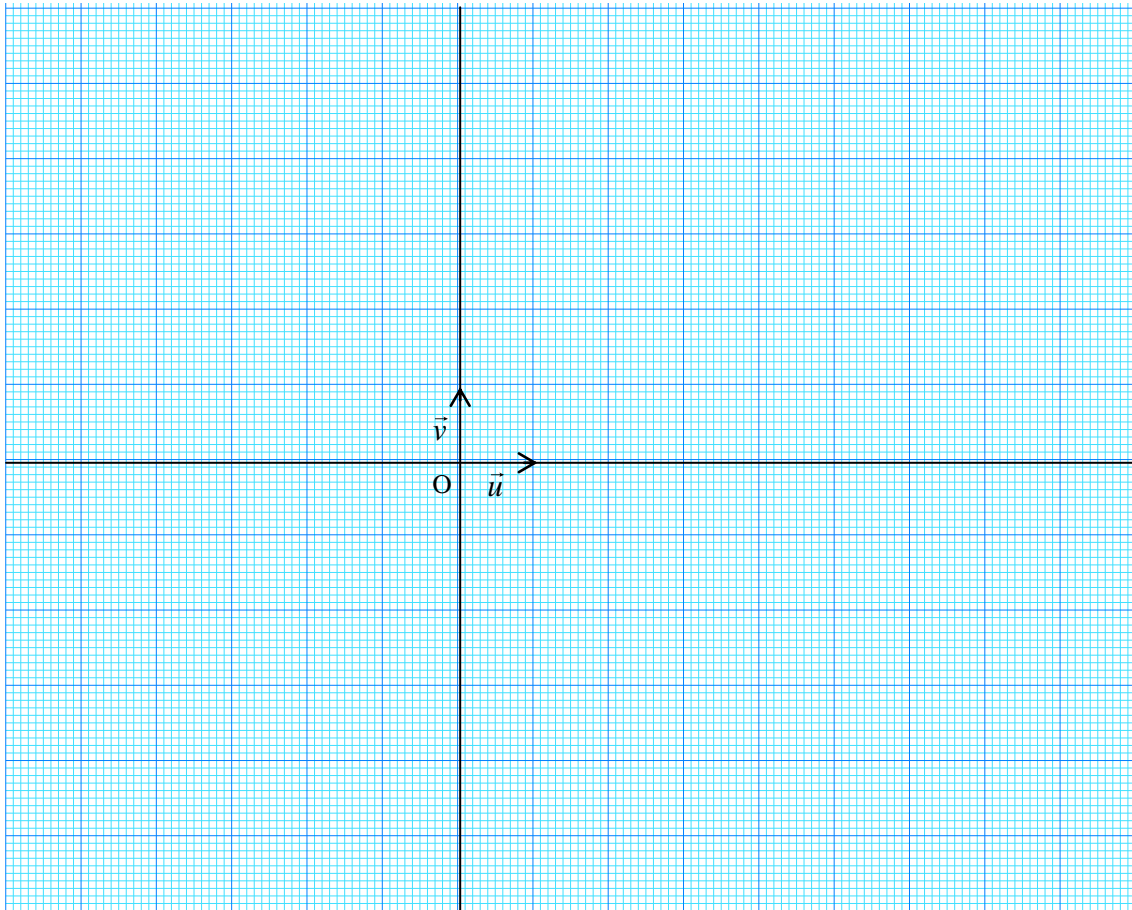
Exercice 3

Soient z_1 et z_2 , deux nombres complexes tels que:

- z_1 est le nombre complexe de module 8 dont un argument est $-\frac{\pi}{6}$
- z_2 est le nombre complexe de module 7 dont un argument est $\frac{2\pi}{3}$.



1) Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité graphique 1 cm ci-dessous :



a) Construire les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 (laisser apparents les tracés ayant permis ces constructions).

b) On considère le vecteur $\overrightarrow{OM_3}$ d'affixe z_3 tel que: $z_3 = z_1 + z_2$.

- Construire le vecteur $\overrightarrow{OM_3}$ (laisser apparents les tracés ayant permis cette construction).
- Déterminer, par lecture graphique, une estimation des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM_3}$ (laisser apparents les tracés ayant permis de donner ces résultats).

2) a) Donner une écriture algébrique des nombres complexes z_1 et z_2 .

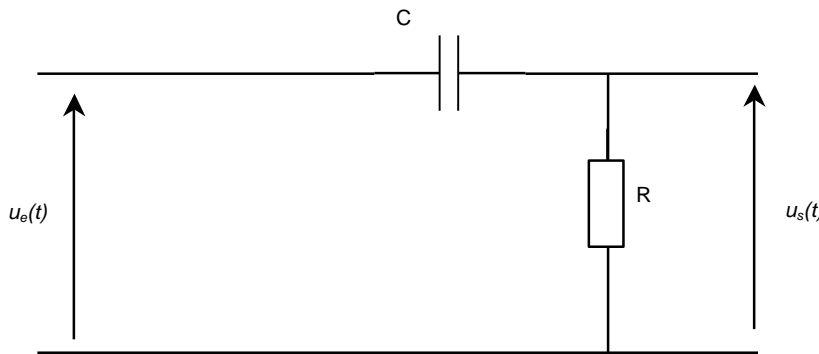
b) En déduire, des résultats précédents, une écriture algébrique du nombre complexe z_3 .

(D'après sujet de Bac Pro Industriels Session 1998)



Exercice 4

On donne ci-dessous le schéma d'un circuit constitué d'un condensateur de capacité $C = 9,2 \times 10^{-9}$ F et d'un dipôle résistif de résistance $R = 10^3$ ohms.



On admet que les tensions $u_e(t)$ (tension d'entrée) et $u_s(t)$ (tension de sortie) sont des tensions sinusoïdales de même pulsation ω définies en fonction du temps t .

1) Détermination de la fréquence de coupure.

La fréquence de coupure notée f_0 , en Hertz, (Hz) du filtre est donnée par la relation :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC} \text{ avec } R \text{ en ohm } (\Omega) \text{ et } C \text{ en farad (F).}$$

Calculer f_0 en kHz. Arrondir à 10^{-1} .

2) Calcul d'un gain en décibel (dB)

La fonction transfert de ce filtre est définie par la grandeur complexe T avec

$$T = \frac{R}{R + \frac{1}{Cj\omega}} \text{ où } j \text{ est le nombre complexe de module 1 et d'argument } \frac{\pi}{2}.$$

a) On pose $x = RC\omega$. Montrer que T peut s'écrire $T = \frac{xj}{xj + 1}$.

b) On note $|T|$ le module de T. Montrer que $|T| = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

3) Le gain G exprimé en décibel (dB) est une grandeur définie par : $G = 20 \log |T|$ où log est le logarithme décimal. On admet que la fréquence des tensions $u_e(t)$ et $u_s(t)$ est $f = 10$ kHz.

a) Donner la valeur de la pulsation ω (en rad/s) en exprimant le résultat sous la forme d'un multiple du nombre π .

b) Calculer la valeur de x arrondie à 10^{-3} .

c) Calculer la valeur de $|T|$ arrondie à 10^{-1} .

d) En déduire la valeur du gain G arrondie à 10^{-1} dB.

(D'après sujet Bac Pro M.A.V.E.L.E.C. et M.R.I.M. Session juin 2003)



Exercice 5

On considère deux courants sinusoïdaux dont l'intensité en fonction du temps t est donnée

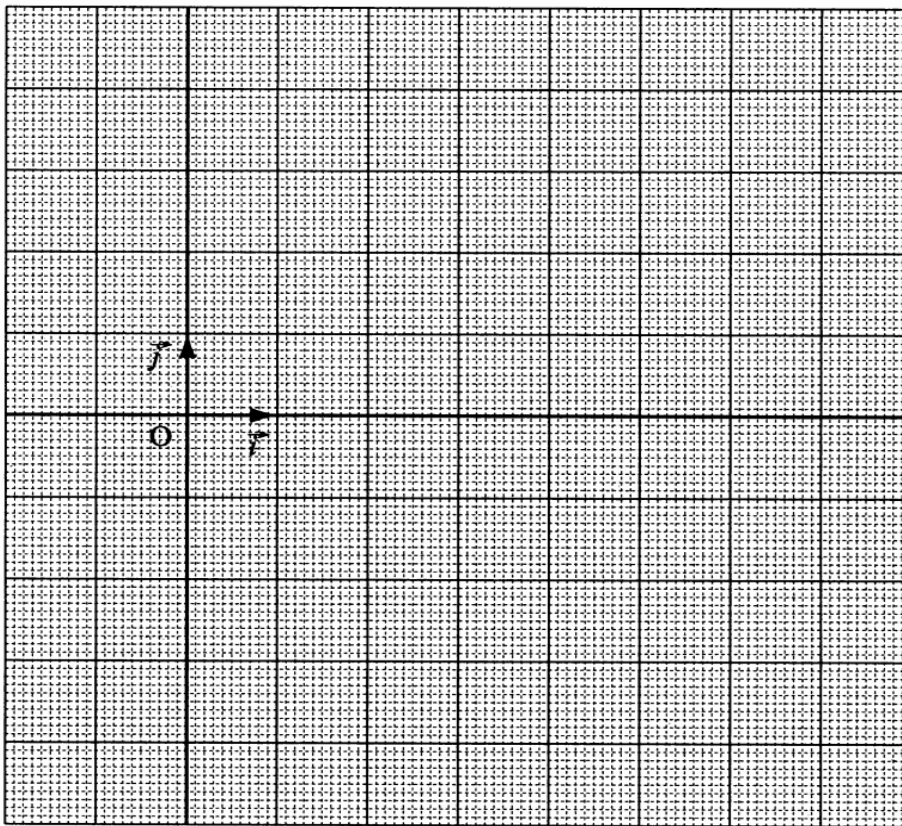
$$i_1(t) = 7,2\sin(100\pi t) \qquad i_2(t) = -4,6\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Nota : ces deux équations sont données à titre indicatif, l'exercice pouvant être traité sans ces données.

Soit $\vec{I}_1(7,2 ; 0)$ le vecteur de Fresnel représentant $i_1(t)$.

Soit $\vec{I}_2(0 ; -4,6)$ le vecteur de Fresnel représentant $i_2(t)$.

1) Représenter graphiquement les deux vecteurs de Fresnel \vec{I}_1 et \vec{I}_2 dans le repère orthonormal suivant où l'unité graphique est le centimètre.



2) Construire le vecteur de Fresnel $\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2$.

3) Déterminer graphiquement les coordonnées de \vec{I} , et sa norme $\|\vec{I}\|$.

4) Soit z_1 le nombre complexe associé au vecteur \vec{I}_1 et z_2 le nombre complexe associé au vecteur \vec{I}_2 . On note j le nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\frac{\pi}{2}$.

a) Exprimer z_1 et z_2 sous la forme algébrique.

b) Calculer $z = z_1 + z_2$.



En déduire le module ρ (valeur arrondie au centième) et, en radians, un argument θ (valeur arrondie au centième) de z .

(D'après sujet de Bac Pro Équipements et Installations Électriques Session 2001)



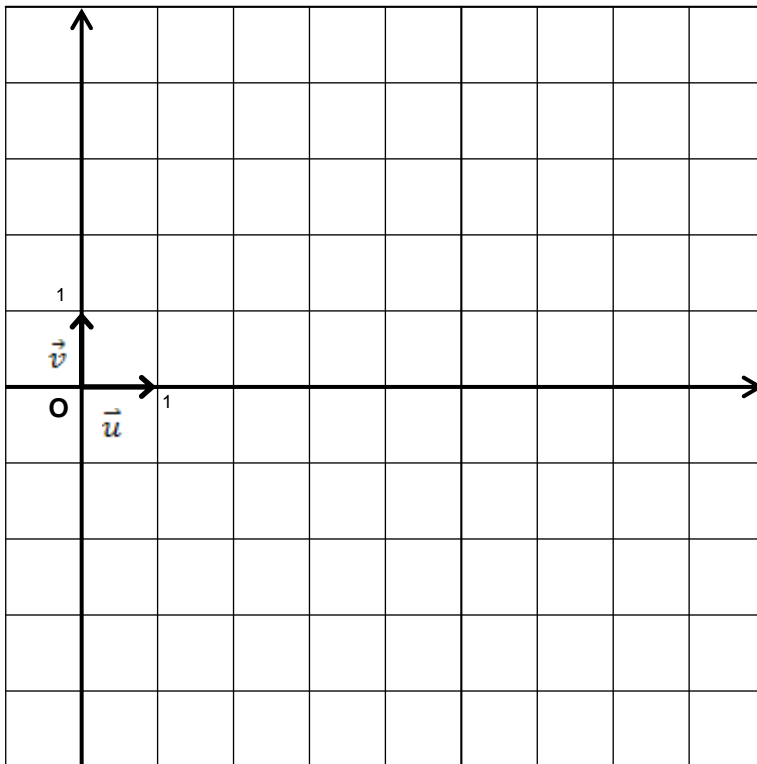
Exercice 6

Sur le circuit de commande d'un dispositif de régulation thermique, on effectue la mesure de deux tensions u_1 et u_2 alternatives sinusoïdales.

On veut déterminer la valeur φ du déphasage de ces deux tensions.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) , on associe à deux tensions sinusoïdales les points M_1 et M_2 d'affixe respectives $z_1 = 3 - 3j$ et $z_2 = 2 + 2\sqrt{3}j$.

1) Placer le point M_1 image du nombre complexe z_1 et le point M_2 image du nombre complexe z_2 dans le repère ci-dessous.



2) Calculer le module ρ_2 et l'argument φ_2 de z_2 sur $[0 ; 2\pi]$. Exprimer l'argument φ_2 en radian.

3) On considère que l'argument de z_1 est $\varphi_1 = \frac{-\pi}{4}$ rad et que l'argument de z_2 est $\frac{\pi}{3}$.

$\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$ sur $[0 ; 2\pi]$.

En déduire la valeur φ en radian, de l'angle $(\overrightarrow{OM_1}; \overrightarrow{OM_2})$ sur $[0 ; 2\pi]$.

Exprimer le déphasage φ en degré.

(D'après sujet de Bac Pro ELEEC Session juin 2007)



Exercice 7

Lors d'une réception par satellite, il apparaît une perte d'énergie due aux impédances de la parabole et du coaxial.

Le coefficient de réflexion R est le nombre complexe définie par $R = \frac{z - z'}{z + z'}$

où z est l'impédance complexe de la parabole et z' celle du coaxial.



1) On considère le cas particulier d'une installation où $z = 75$ et $z' = 46,6 - 20,3 j$ (j désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$)

- a) Donner la forme algébrique de $z_1 = z - z'$ et calculer le module ρ_1 de z_1 . Arrondir à 10^{-2} .
- b) Donner la forme algébrique de $z_2 = z + z'$ et calculer le module ρ_2 de z_2 . Arrondir à 10^{-2} .
- c) Montrer que le module de $R = \frac{z_1}{z_2}$ est $\rho = 0,28$ (valeur arrondie à 10^{-2}).

d) Le rapport d'onde stationnaire ROS est défini par : $ROS = \frac{1 + \rho}{1 - \rho}$

Calculer le ROS pour cette installation. Arrondir à 10^{-2} .

e) La norme préconise que le rapport d'onde stationnaire défini par $ROS = \frac{1 + \rho}{1 - \rho}$ soit inférieur à 2. L'installation respecte-t-elle la norme ?

2) Dans le cas général, le module ρ du coefficient de réflexion R de l'installation est un nombre réel tel que $0 < \rho < 1$.

a) Montrer que l'inéquation $\frac{1 + \rho}{1 - \rho} \leq 2$ où $0 < \rho < 1$ se ramène à $3\rho \leq 1$.

b) Quelle est la valeur maximum de ρ qui respecte la norme énoncée à la question 1) e) ?

(D'après sujet de Bac Pro MAVELEC Session juin 2006)

Exercice 8

Trois intensités sinusoïdales i_1, i_2 et i_3 , de même fréquence, sont représentées par les nombres complexes z_1, z_2 et z_3 dont on donne les modules et les arguments :

z_1 : module 6; argument : 0

z_2 : module 8 ; argument : $\frac{2\pi}{3}$

z_3 : module 12 ; argument : $\frac{4\pi}{3}$



On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1) Écrire z_1, z_2 et $z_1 + z_2$ sous la forme algébrique $a + jb$; a et b sont des nombres réels.

2) Représenter dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , les images $M_1 ; M_2$ et M_3 des nombres complexes z_1, z_2 et z_3 .



- 3) a) Placer l'image S_1 de $z_1 + z_2$.
- b) Construire l'image S de la somme $z = z_1 + z_2 + z_3$
- 4) Déterminer graphiquement le module et un argument de z .

(D'après sujet de Bac Pro EIE Session 1995)

Exercice 9

Le moteur d'un tournebroche est alimenté par une tension alternative sinusoïdale monophasée de valeur efficace 230 V et de fréquence 50 Hz.

Ce moteur est assimilé à un circuit RL en série, constitué d'un conducteur ohmique de résistance R et d'une bobine d'inductance L. On mesure : $R = 7\ 150\ \Omega$ et $L = 22,5\ \text{H}$.

On rappelle que les expressions algébriques des impédances complexes de R et L sont :

$$\begin{cases} Z_R = R \\ \text{et} \\ Z_L = jL\omega \end{cases} \quad \text{Où} \quad \begin{cases} j \text{ est le nombre complexe de module 1 et d'argument } \frac{\pi}{2} \\ \omega = 100\pi \text{ est la pulsation en rad/s} \end{cases}$$

L'impédance complexe Z du circuit vérifie : $Z = Z_R + Z_L$.

- 1) En arrondissant les résultats à l'unité, montrer que $Z = 7\ 150 + 7\ 069j$.
- 2) Le module $|Z|$ du nombre complexe Z correspond à l'impédance du circuit. Calculer ce module. Le résultat sera arrondi à l'unité.
- 3) L'argument du nombre complexe Z correspond au déphasage φ entre la tension et l'intensité. Calculer φ au dixième de degré.
- 4) On relève les valeurs nominales suivantes sur la plaque signalétique du moteur :
 $U = 230\ \text{V} \quad ; \quad I = 0,022\ \text{A} \quad ; \quad \cos \varphi_N = 0,70$

On rappelle que l'impédance nominale est : $|Z_N| = \frac{U}{I}$

- a) Calculer l'impédance nominale $|Z_N|$, arrondie à l'unité et le déphasage nominal φ_N entre U et I, arrondi au dixième de degré.
- b) On considère que le circuit fonctionne dans de bonnes conditions si la différence entre l'impédance nominale $|Z_N|$ et l'impédance du circuit $|Z|$ (calculée à la question 2) n'excède pas 5 % de l'impédance nominale, c'est-à-dire si :

$$\frac{|Z_N| - |Z|}{|Z_N|} \leq 0,05$$

Indiquer si ce circuit fonctionne dans de bonnes conditions. Justifier la réponse.

(D'après sujet de Bac Pro MRIM et SEN Session juin 2011)