NOMBRES COMPLEXES

I) Forme algébrique des nombres complexes

1) Définition

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ dont les éléments, appelés **nombres complexes**, sont de la forme :

$$z = a + jb$$

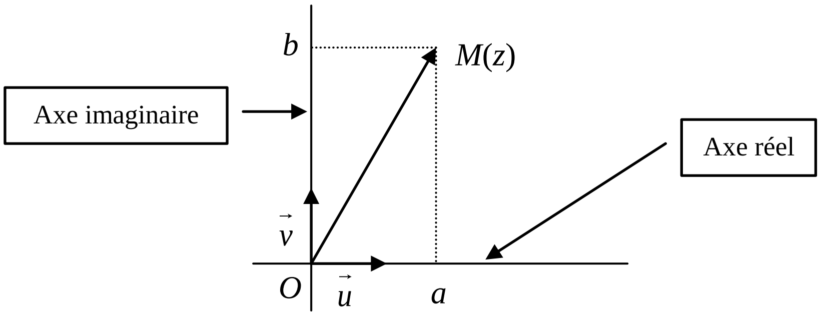
où *a et* b sont des nombres réels et j² = -1.
a est la **partie réelle** et *b* est la **partie imaginaire**.

L'écriture $z = a + jb$ est appelée **forme algébrique** de *z*.

2) Représentation graphique

Dans le plan muni d'un repère, le nombre complexe $z = a + jb$ est représenté par le point *M* de coordonnées *(a, b)* ou le vecteur: $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

On dit que *M* **est l'image de** *z* ou que *z* **est l'affixe de** *M*.



II) Égalité et conjugué

1) Égalité

Deux nombres complexes $z_1 = a_1 + jb_1$ et $z_2 = a_2 + jb_2$ sont égaux s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire : $z_1 = z_2$ alors $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$
En particulier : si $z = a + jb = 0$, alors $a = b = 0$

2) Conjugué

Si $z = a + jb$, le nombre $a - jb$ est appelé conjugué de *z* et est noté $\bar{z}$.

$$z = a + jb \Leftrightarrow \bar{z} = a - jb$$

On remarque que $\overline{(\bar{z})} = z$.

III) Opérations

On admet que les règles de calcul pour l'addition et la multiplication sont les mêmes dans $\mathbb{C}$ que dans $\mathbb{R}$ (en utilisant $j^2 = -1$).

1) Somme

$$\text{Si } z = a + jb \text{ et } z' = a' + jb', \text{ alors } z + z' = (a + a') + j(b + b').$$

2) Produit

$$\text{Si } z = a + jb \text{ et } z' = a' + jb', \text{ alors } zz' = (aa' - bb') + j(ab' + ba').$$

3) Inverse et quotient

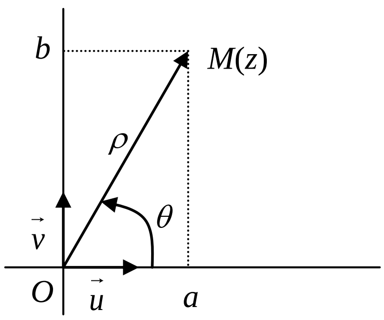
L'inverse d'un nombre complexe z, noté $\frac{1}{z}$, peut être mis sous la forme $a + jb$ en utilisant le conjugué : $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}}$

Il en est de même pour le quotient de deux nombres complexes z et z' (z' non nul) : $\frac{z}{z'} = \frac{\overline{z}\,\overline{z'}}{z'\overline{z'}}$

IV) Forme trigonométrique

1) Module

Dans un plan de repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, soit un point M et son affixe $z = a + jb$. La norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$ est : $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$



On appelle **module** de z le nombre réel positif : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Le module peut aussi être désigné par les lettres ρ ou r. On remarque que :

$$z\overline{z} = (a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2 \text{ d'où } z\overline{z} = |z|^2$$

2) Argument

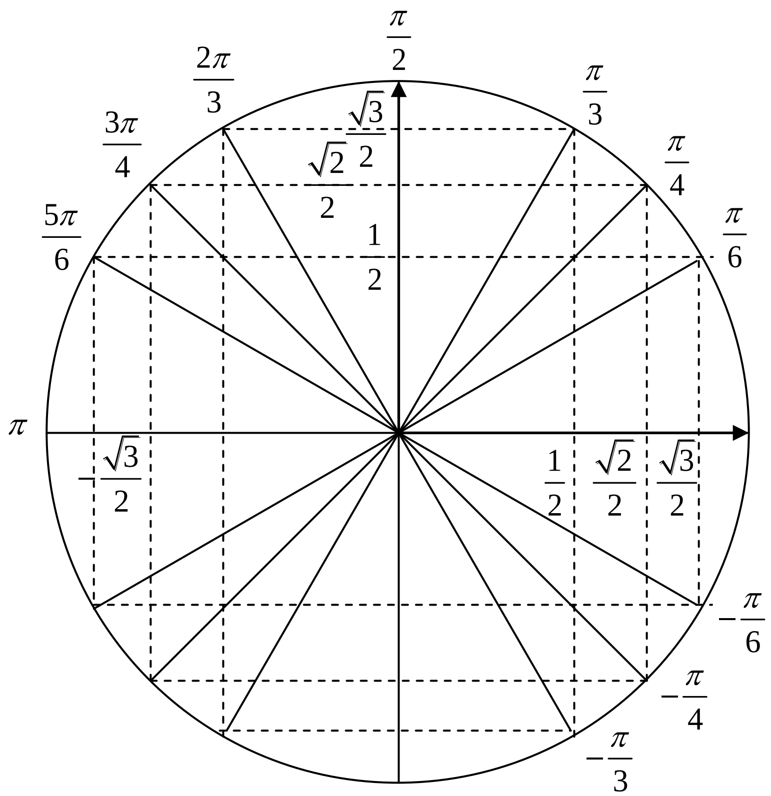
On appelle **argument** de z, pour $z \neq 0$, et on note **arg z,** une mesure à 2π près de l'angle θ.

$$\arg z = \theta, \text{ avec } \cos\theta = \frac{a}{\rho} \text{ et } \sin\theta = \frac{b}{\rho}$$

Remarques

- Le nombre $z = 0$ n'a pas d'argument car θ n'est pas défini.
- Le tableau ci-dessous donne les valeurs trigonométriques exactes des angles remarquables.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0



3) Forme trigonométrique d'un nombre complexe

La forme trigonométrique d'un nombre complexe est : $z = \rho\left(\cos\theta + j\sin\theta\right)$.

j est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$: $j = \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$.