EXERCICES SUR LES FONCTIONS EXPONENTIELLES

Exercice 1

Pour recharger un bain électrolytique de son soluté, on étudie sa dissolution en laboratoire. Pour cela, on introduit 10 g de ce soluté dans 100 mL d'électrolyte non saturé.
Les mesures obtenues sont les suivantes :

durée (en min)	t	1	2	3	…
masse non dissoute (en g)	m	8	6,4	5,12	…

L'objectif de cet exercice est de déterminer la durée nécessaire pour dissoudre 9 g de soluté.

1) Etude d'une fonction f :

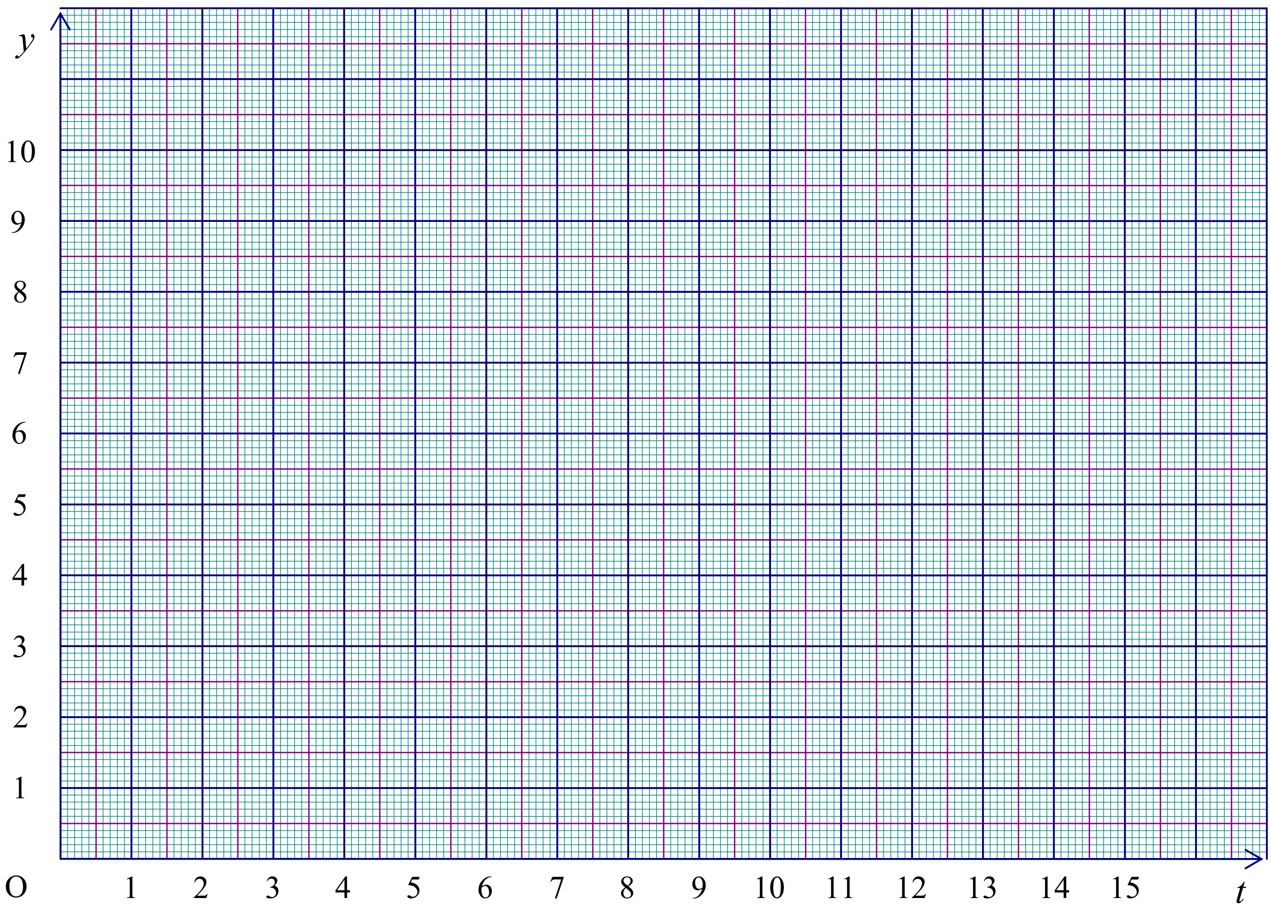
On considère la fonction f définie pour tout réel t appartenant à l'intervalle [1 ; 15] par :

$$f(t) = 10 \times 0{,}8^t$$

a) Compléter le tableau de valeurs.

t	0	1	2,5	5	7,5	10	11	13	15
valeur de $f(t)$ arrondie au centième	10			3,28		1,07			0,35

b) Tracer la courbe C, représentant f, à l'aide du repère orthonormal suivant.



c) À l'aide d'une lecture graphique déterminer la solution de l'équation : $10\times 0{,}8^t = 1$ pour t appartenant à l'intervalle [1 ; 15]. (Laisser apparents les traits utilisés pour la lecture).

d) Résoudre algébriquement l'équation : $10\times 0{,}8^t = 1$ pour t appartenant à l'intervalle [1 ; 15]. Arrondir le résultat à 10^{-1}.

2) Réponse au problème posé :

Déduire de l'étude précédente, la durée nécessaire pour dissoudre 9 g de soluté.

(*D'après sujet de Bac Pro Traitement de surface Session 2003*)

Exercice 2

Un agriculteur a équipé son domaine d'une pompe d'irrigation. Le moteur thermique de ce groupe d'irrigation est équipé d'un système de régulation de température. Au-dessus d'une valeur critique de température K, le moteur est arrêté. Le système de régulation de température s'enclenche automatiquement.

La température θ du moteur thermique chute alors grâce au système de régulation. On admet que cette température diminue en suivant la loi suivante :

$$\theta(t) = Ke^{-0{,}02\,t}$$

avec θ température en degré Celsius.
t durée de l'arrêt du moteur en seconde.
K valeur critique de température en degré Celsius.

Le moteur redémarre lorsque sa température atteint 100°C.

Le but de ce problème est de calculer la durée d'arrêt du moteur thermique du groupe d'irrigation.

Détermination de la valeur critique de température *K* :

Après 20 secondes, la température θ atteint 200 °C.

1) Montrer que la valeur critique de température K vaut : $K = \dfrac{200}{e^{-0{,}4}}$

2) Calculer, arrondie au dixième, la valeur de K.

Etude la fonction mathématique associée :

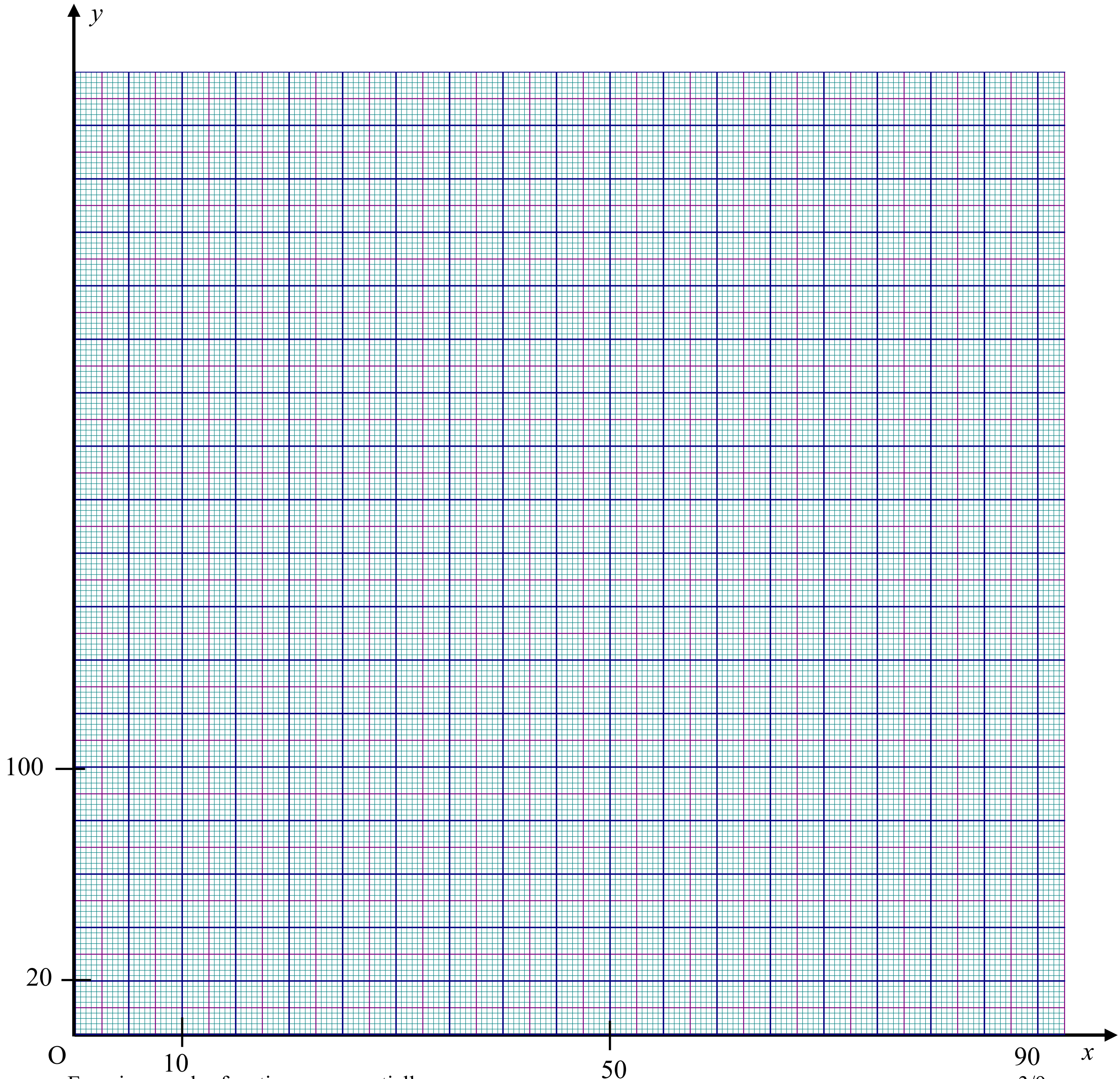
On considère la fonction f définie pour x appartenant à l'intervalle [0 ; 90] par :

$$f\,(x) = 298\ \mathrm{e}^{-0{,}02\,x}$$

3) Compléter le tableau de valeurs de la fonction f.

x	0	5	10	20	30	50	70	90
- 0,02x	0			- 0,4				
valeur de $f(x)$ arrondie à l'unité	298			200			73	

4) Tracer la courbe C_f représentative de la fonction f dans le plan rapporté au repère orthogonal.



5) Tracer la droite d_1 d'équation $y = 100$.

6) Déterminer graphiquement les coordonnées du point d'intersection de C_f et (d_1),

7) a) Résoudre par le calcul : $298\,e^{-0,02\,x} = 100$

b) Calculer, arrondie à 10^{-1}, la valeur de $-50\ln\left(\dfrac{100}{298}\right)$.

Application au système de régulation :

Le moteur thermique redémarre lorsque sa température atteint 100°C.

8) D'après l'étude précédente, indiquer la durée, arrondie à la seconde, de l'arrêt du moteur.

(*D'après sujet de Bac Pro M.E.M.A.T.P.P.J. Session 2003*)

<u>Exercice 3</u>

La première partie est indépendante des deuxième et troisième parties.

Première partie : freinage d'un disque tournant dans un liquide.

Un disque tournant dans un liquide subit un freinage dû à ce liquide.
La vitesse angulaire ω, exprimée en radians par seconde, de ce disque est donnée en fonction du temps *t*, exprimé en secondes, par la relation :

$\omega = k \times a^t$ où k et a sont des constantes.

On se propose de déterminer les valeurs de k et de a.

1) Calculer la valeur de k sachant que pour $t = 0$ s, on a $\omega = 100$ rad/s.

2) Calculer la valeur de a sachant que pour $t = 1$ s, on a $\omega = 50$ rad/s.

Deuxième partie : étude de fonctions.

1) Soit la fonction *f* définie sur l'intervalle [0 ; 4] par : $f(t) = 0,5^{\,t}$.

a) Déterminer le sens de variation de la fonction *f* à l'aide de l'un des rappels figurant à la fin de l'exercice. Recopier le rappel utilisé.

b) Recopier, en le complétant, le tableau de variation de la fonction *f*. Préciser les valeurs *f*(0) et *f*(4).

t	0 4
$f(t)$	

2) Soit la fonction g définie sur l'intervalle [0 ; 4] par : $g(t) = 100 \times 0,5^{t}$.

a) Donner une relation entre $g(t)$ et $f(t)$.

b) Calculer g(0) et g(4).

c) On admet que les fonctions g et f ont le même sens de variation sur l'intervalle [0 ; 4].

L'un des tableaux de variation proposés ci-dessous correspond au tableau de variation de la fonction g sur l'intervalle [0 ; 4].

Recopier ce tableau et justifier le choix fait.

t	0		4
$g(t)$	100	$\searrow$	0

t	0		4
$g(t)$	0	$\nearrow$	100

t	0		4
$g(t)$	100	$\searrow$	6,25

3) Compléter le tableau de valeurs figurant ci-dessous.

t	0	1	1,5	2	3	4
$g(t)$			35,36			

4) Tracer la courbe C représentative de la fonction g dans le plan rapporté au repère orthogonal d'unités graphiques : en abscisses 4 cm représente 1 et en ordonnées 1 cm représente 5.

Troisième partie : détermination graphique d'une durée de freinage.

On suppose que la vitesse angulaire du disque cité dans la première partie est exprimée, en fonction du temps t, par la relation :

$$\omega = 100 \times 0,5^{t} .$$

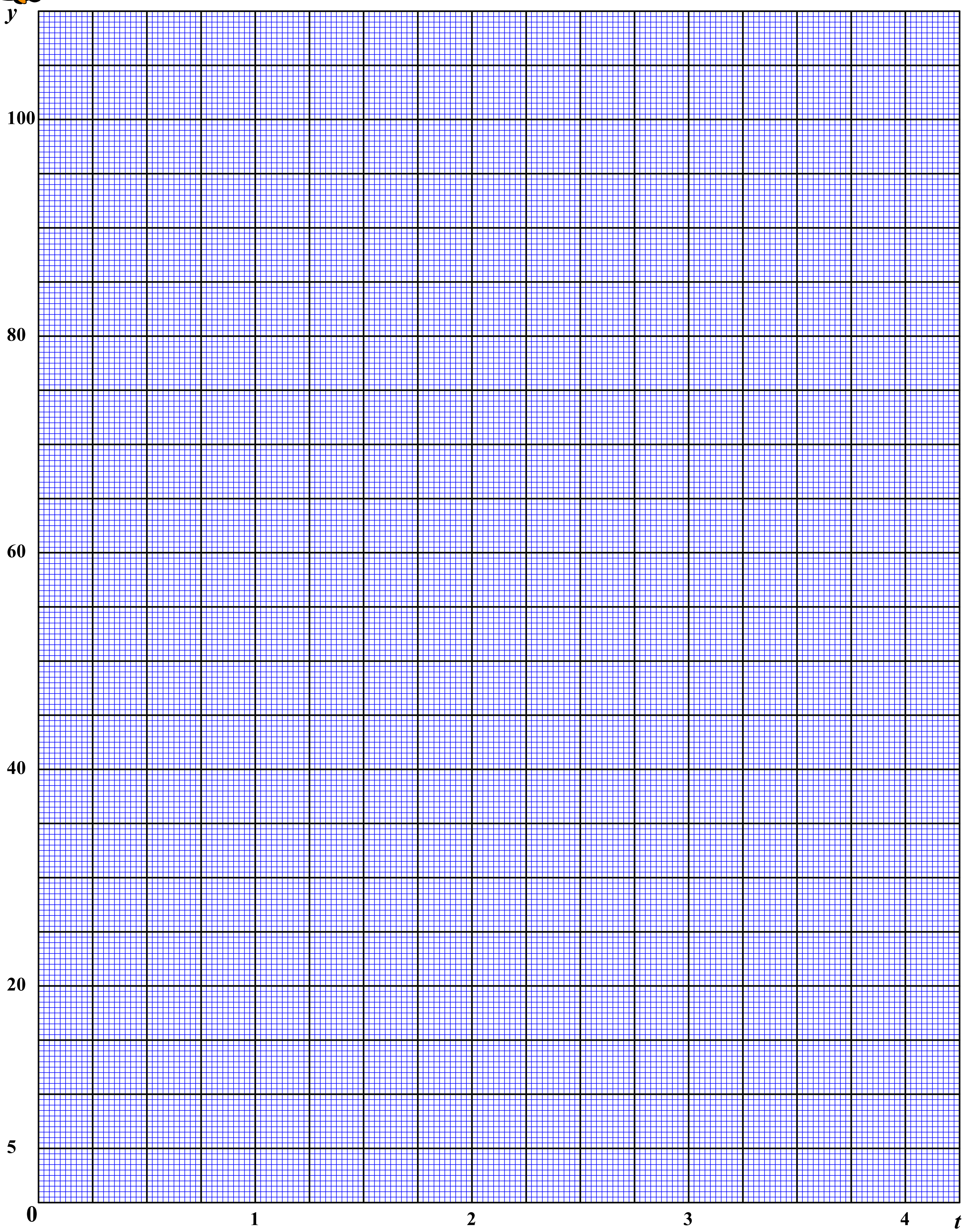
Déterminer graphiquement une valeur approchée du temps t correspondant à une vitesse de rotation ω de 30 rad/s. Laisser apparents les tracés permettant de répondre à cette question.

"INFORMATIONS"

Fonction exponentielle de base a (a > 0) : $x \longmapsto a^x$

<u>Rappels</u> :

n°1 - La fonction $x \longmapsto a^x$ est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
n°2 - Pour tout x réel, $a^x > 0$.
n°3 - $a^0 = 1$.
n°4 - $a^1 = a$.
n°5 - Si $a > 1$, la fonction $x \longmapsto a^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
n°6 -Si $0 < a < 1$, la fonction $x \longmapsto a^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

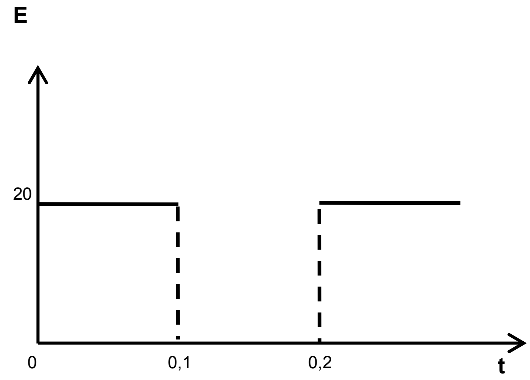


(*D’après sujet de Bac Pro Définition des produits industriels Session juin 1999*)

Exercice 4

I) Calculs de tension

Une bobine d'inductance L (en henrys) et de résistance R (en ohms) est soumise à une tension carrée.
La représentation graphique de cette tension E (en volts) en fonction du temps t (en secondes) est donnée ci-dessous:



1) Donner la valeur de la tension E pour $0 < t < 0{,}1$ s.

2) Donner la valeur de la tension E pour $0{,}1 < t < 0{,}2$ s.

II) Étude de fonction

Soit la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 0,1] par $f(t) = 2(1 - e^{-50\,t})$.

1) Montrer que $f'(t) = 100e^{-50\,t}$ où f' est la dérivée de la fonction f.

2) Étudier le signe de $f'(t)$ pour tout t appartenant à l'intervalle [0 ; 0,1].

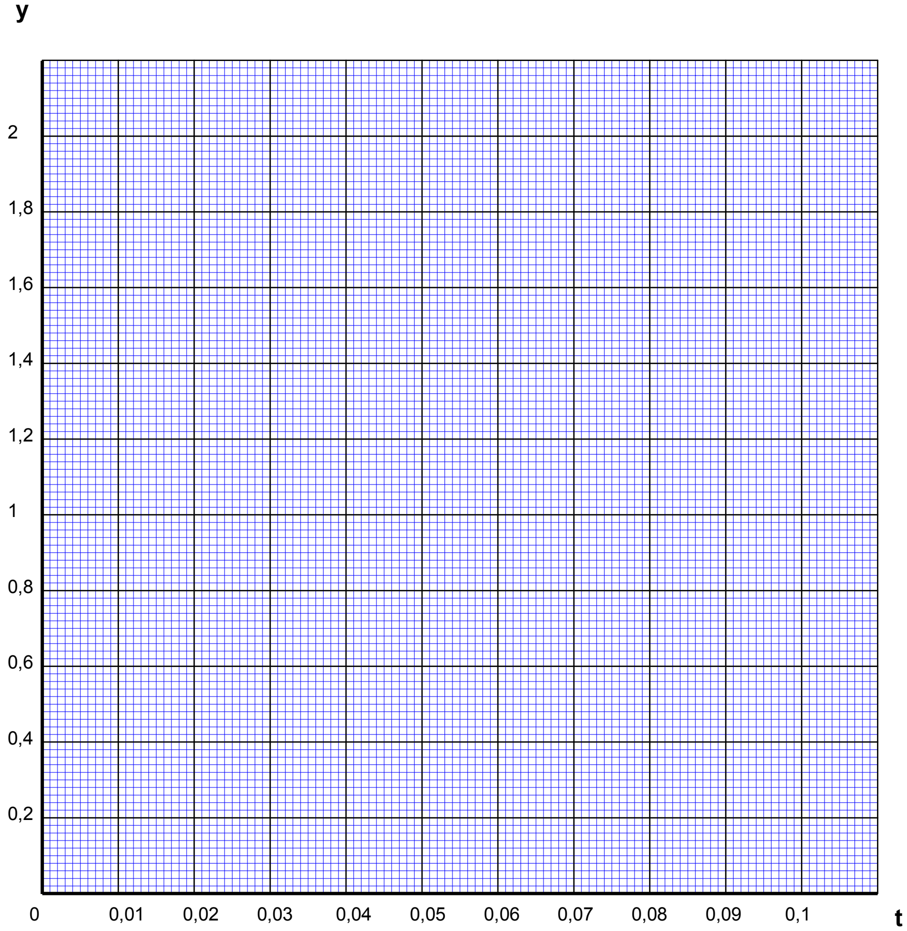
3) Compléter le tableau de variation de la fonction f sur cet intervalle.

t	
Signe de $f'(t)$	
Variation de f	

4) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous. Arrondir les résultats à 10^{-2}.

t	0	0,005	0,010	0,030	0,040	0,060	0,080	0,100
$f(t)$	0		0,79		1,73			1,99

5) Tracer la courbe C représentative de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 0,1] dans le repère ci-dessous.



III) Exploitation

On admet que la courbe *C* représente l'intensité *i*, en ampères, dans la bobine en fonction du temps *t*, en secondes.

1) Placer sur la courbe le point A d'ordonnée $i_o = 1{,}26$ A.
2) Déterminer graphiquement l'abscisse τ de ce point A. Laisser apparents les traits de construction.
3) L'abscisse τ de A, appelée constante de temps, est donnée par la relation $\tau = \frac{L}{R}$.
En déduire la valeur de la résistance R de la bobine sachant que l'inductance L est égale à 0,2 H.

(*D'après sujet de Bac Pro E.I.E. Session juin 2003*)

<u>Exercice 5</u>

Lors de la charge d'un condensateur les variations de la tension à ses bornes peuvent être décrites par la fonction *f*, de la variable temps *t*, définie sur l'intervalle [0 ; 0,12] par :

$$f : t \mapsto 12\left(1 - e^{-50t}\right)$$

Le temps est exprimé en secondes et la tension en volts.

1) Etude des variations de *f* :

a) Calculer la fonction dérivée de *f*, notée *f* '.
b) Étudier le signe de *f* ' sur [0 ; 0, 12].
c) Construire le tableau de variation de la fonction *f* sur l'intervalle [0 ; 0,12].

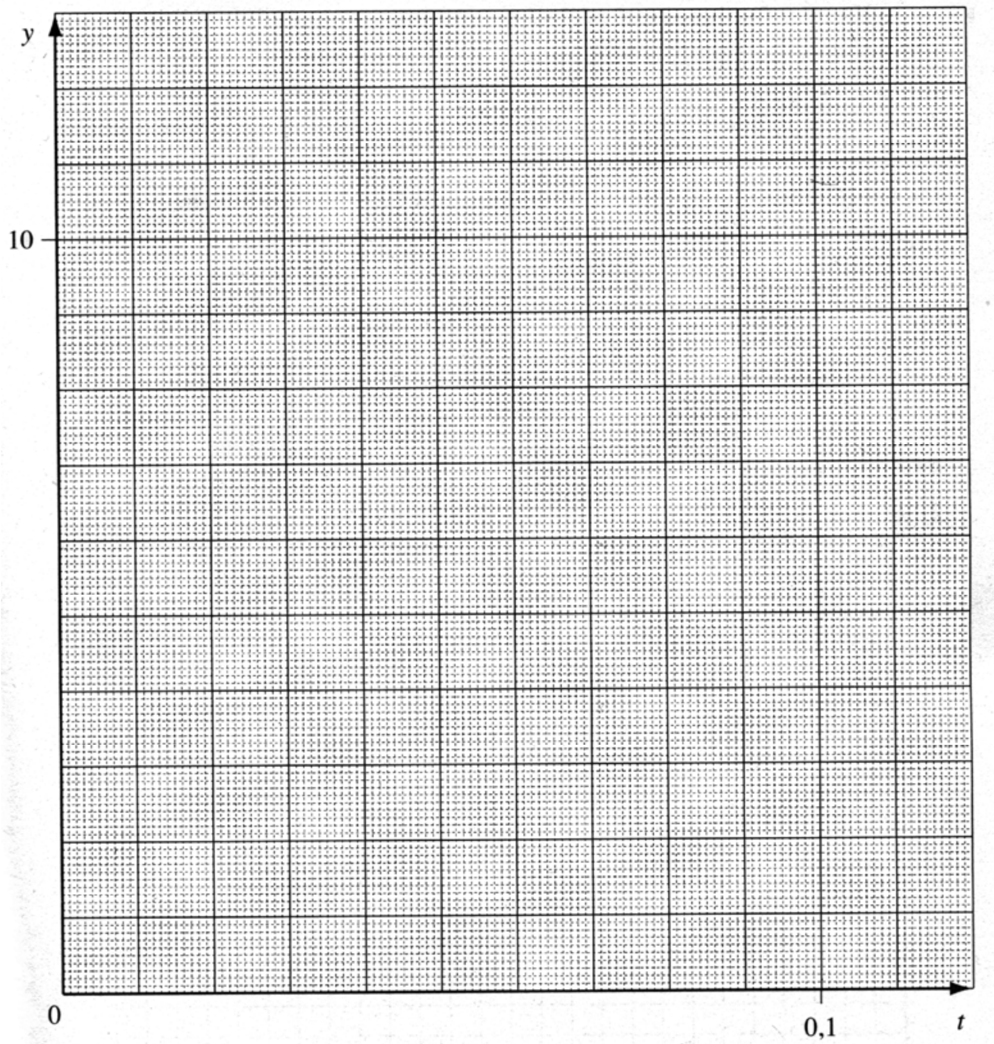
2) Courbe représentative de f : C_f

a) Compléter le tableau ci-dessous en donnant les valeurs approchées à 10^{-2} près.

t	0	0,005	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,07	0,09	0,12
$f(t)$										

b) Construire, sur le graphique ci-après la représentation graphique C_f sur l'intervalle $[0\ ;\ 0{,}12]$.

Le repère choisi a pour unités graphiques : en abscisse, 1 cm pour 0,01 unité
en ordonnée, 1 cm pour 1 unité



3) Temps de charge du condensateur

a) Quelle est, en volts, la tension aux bornes du condensateur complètement chargé ?

b) Déterminer graphiquement l'instant t auquel le condensateur est chargé à 80 % de la valeur maximale.

c) Résoudre l'équation $f(t) = 0{,}8 \times 12$.

En déduire une valeur approchée de t_0, à la milliseconde près.

(*D'après sujet de Bac Pro Maintenance réseaux bureautiques télématiques Session septembre 2001*)