



NOMBRES COMPLEXES

Un peu d'histoire

Au XVI^e siècle, l'italien Cardan lève une interdiction célèbre entre toutes : il imagine qu'un nombre négatif peut admettre une racine carrée. Ainsi était créé l'ensemble des nombres complexes.

Deux siècles plus tard, le suisse Euler utilise la lettre « i » en lieu et place de la notation pour le moins ambiguë « $\sqrt{-1}$ ».

Le nombre i est un nombre imaginaire, dans le sens où il ne peut être un nombre réel !

Depuis, la théorie sur les nombres complexes n'a cessé de progresser et de trouver des applications dans divers domaines tels que l'électricité, l'électronique, ...



Leonhard Euler, mathématicien suisse (1707-1783)

Remarque : La lettre j est souvent préférée à i afin d'éviter, lors d'applications en électricité, toute confusion avec l'intensité du courant.

1) Présentation des nombres complexes

1) Définition

Il existe un ensemble noté \mathbb{C} dont les éléments, appelés nombres complexes, sont de la forme :

$$z = a + jb$$

où a et b sont des nombres réels et $j^2 = -1$.

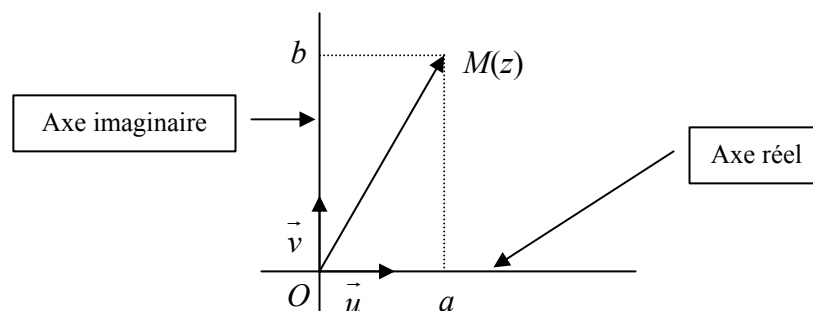
a est la partie réelle et b est la partie imaginaire.

Remarque : $a + jb$ est la forme algébrique de z .

2) Représentation graphique

Dans le plan muni d'un repère, le nombre complexe $z = a + jb$ est représenté par le point M de coordonnées (a, b) ou le vecteur: $\overline{OM} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

On dit que M est l'image de z ou que z est l'affixe de M .





3) Egalité

Deux nombres complexes $z_1 = a_1 + jb_1$ et $z_2 = a_2 + jb_2$ sont égaux s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire : $z_1 = z_2$ alors $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$

En particulier : si $z = a + jb = 0$, alors $a = b = 0$

4) Conjugué

Si $z = a + jb$, le nombre $a - jb$ est appelé conjugué de z et est noté \bar{z} .

$$z = a + jb \Leftrightarrow \bar{z} = a - jb$$

On remarque que $\overline{(\bar{z})} = z$.

II) Opérations

On admet que les règles de calcul pour l'addition et la multiplication sont les mêmes dans \mathbb{C} que dans \mathbb{R} (en utilisant $j^2 = -1$).

1) Somme

Si $z = a + jb$ et $z' = a' + jb'$, alors $z + z' = (a + a') + j(b + b')$.

2) Produit

Si $z = a + jb$ et $z' = a' + jb'$, alors $zz' = (aa' - bb') + j(ab' + ba')$.

3) Inverse et quotient

L'inverse d'un nombre complexe z , noté $\frac{1}{z}$, peut être mis sous la forme $a + jb$ en utilisant le

conjugué : $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$

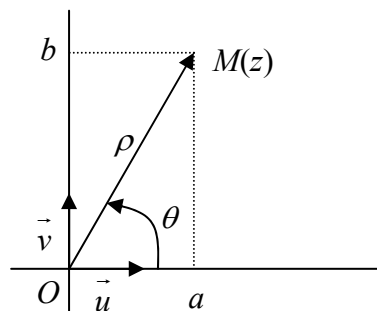
Il en est de même pour le quotient de deux nombres complexes z et z' (z' non nul) : $\frac{z}{z'} = \frac{\bar{z}\bar{z}'}{z'\bar{z}'}$

III) Forme trigonométrique

1) Module

Dans un plan de repère (O, \vec{u}, \vec{v}) , soit un point M et son affixe $z = a + jb$. La norme du

vecteur \overline{OM} est : $\|\overline{OM}\| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$





3) Forme trigonométrique d'un nombre complexe

La forme trigonométrique d'un nombre complexe est : $z = \rho(\cos \theta + j \sin \theta)$.

j est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$: $j = \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$.

4) Opération et forme trigonométrique ($z \neq 0$ et $z' \neq 0$)

a) Produit

$$zz' = \rho\rho'[\cos(\theta + \theta') + j \sin(\theta + \theta')]$$

Ce qui peut s'écrire :

$$\left. \begin{array}{l} |zz'| = |z||z'| \\ \arg zz' = \arg z + \arg z' \end{array} \right\} \text{ ou } [\rho, \theta] \times [\rho', \theta'] = [\rho\rho', \theta + \theta']$$

b) Conjugué

$$\bar{z} = \rho(\cos \theta - j \sin \theta) = \rho[\cos(-\theta) + j \sin(-\theta)]$$

Ce qui peut s'écrire :

$$\left. \begin{array}{l} |\bar{z}| = |z| \\ \arg \bar{z} = -\arg z \end{array} \right\} \text{ ou } \bar{z} = [\rho, -\theta]$$

c) Inverse

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\rho(\cos \theta - j \sin \theta)}{\rho^2} = \frac{1}{\rho}(\cos \theta - j \sin \theta)$$

Ce qui peut s'écrire :

$$\frac{1}{z} = \left[\frac{1}{\rho}, -\theta \right]$$

d) Quotient

$$\frac{z}{z'} = \frac{[\rho, \theta]}{[\rho', \theta']} = [\rho, \theta] \times \left[\frac{1}{\rho'}, -\theta' \right] = \left[\frac{\rho}{\rho'}, \theta - \theta' \right]$$