DÉNOMBREMENT ET PROBABILITÉ

Le petit dernier

Quand on énumère toutes les façons de décomposer 126 en un produit de 4 facteurs, on trouve des sommes d'âges allant de 15 (2 + 3 + 3 + 7) à 129 (1 + 1 + 1 + 126). Mais seule la somme 27 est obtenue de deux façons (1 + 1 + 7 + 18 et 1 + 2 + 3 + 21). Si le séducteur hésite, c'est entre ces deux configurations. L'article « le » précédant « petit dernier » exclut la gémellité. Les âges sont donc 1, 2, 3 et 21 ans.

Le clochard et ses mégots

La réponse est 5. Avec 9 mégots, il fait 3 cigarettes, qu'il fume.
Reste alors 3 mégots, dont il refait une cigarette.
L'ayant fumée, il lui reste un mégot, plus celui qu'il a délaissé au début. Avec ses 2 mégots, il demande à un compagnon de lui en prêter un. Ce qui permet de faire une nouvelle cigarette. Il la fume et rend le mégot qui reste à son camarade.
On a 3 + 1 + 1 = 5

Simone et ses complexes

Solution :

Epoque du traitement	Nombre de complexes
A la fin	1
Avant le 3ème psychanalyste	$(1 + 0,5)\times 2 = 3$
Avant le 2ème psychanalyste	$(3 + 0,5)\times 2 = 7$
Avant le 1er psychanalyste	$(7 + 0,5)\times 2 = 15$

Simone avait donc 15 complexes au départ. Le coût total du traitement a donc été de :
$14\times 300 = 4200$ soit 4200 €.

Des économies de bout de chaînes.

Il suffit de rompre tous les anneaux de la cinquième chaîne soit 4 anneaux et de s'en servir pour recomposer une seule chaîne. Le coût est alors de 40 € soit une économie de 10 €.

Les chaussettes et les gants

Il doit prendre au minimum 3 chaussettes :
Premier choix : soit il tire une chaussette grise ou une noire
Deuxième choix : soit il tire une chaussette grise ou une noire
Troisième choix : soit il tire une chaussette grise ou une noire. Il a forcement deux chaussettes grise et une noire ou deux chaussettes noires et une grise.

Pour les gants, il doit en prendre 11. Imaginez qu'il n'a pas de chance et qu'il ne prenne que des mains gauches, il n'aura une main droite qu'au 11ème choix.

Les joyeux fêtards

S'il y a n convives, chacun trinque avec n-1 convives (on ne peut pas trinquer avec soi même) le nombre de chocs de verres est donc :

$$\frac{n\times(n-1)}{2}$$

On divise par deux car lorsque je trinque avec une personne, celle-ci trinque avec moi. Cela ne fait qu'un choc.

On a donc :

$$\frac{n \times (n-1)}{2} = 28$$

$$\text{d'où} \quad n \times (n-1) = 56$$

Cela revient donc à chercher deux nombres entiers consécutifs (n-1 précède n) dont le produit est 56. On trouve assez facilement 7×8. Les voisins étaient donc huit.
Le fils s'est abstenu de faire tous ces calculs. Il a tout simplement remarqué que s'il y 7 chocs de moins, c'est que la personne a trinqué sept fois. Comme elle ne peut pas trinquer avec elle-même, ils sont donc huit.

Les poissons rouges
Soit N le nombre total de poissons.
Proportion de poissons marqués en vert : 12/N au vu de la première prise et 4/11 au vu de la seconde.
D'où l'équation : 12/N = 132 et N = 33.
Il y a approximativement 33 poissons rouges dans le grand aquarium.

Les 100 Mafieux
Vous avez répondu 50/50 ? 49/51 ? C'est mal parti: il fallait bien sûr répondre 99 mafieux !!

Probabilités
Ce n'est ni le premier, ni le troisième qui a le plus de chances d'en sortir vivant : les chances sont égales entre les trois...

Les trois associés
Il suffit de poser trois serrures sur la porte du coffre. Appelons ces serrures A, B et C. La répartition des clés sera :
Premier associé : clé de A et clé de B.
Deuxième associé : clé de B et de C.
Troisième associé : clé de A et clé de C.
Ainsi, chaque associé n'a que deux clés sur trois et ne peut ouvrir seul. Mais il suffit qu'il soit accompagné de l'un quelconque des deux autres pour pouvoir ouvrir les trois serrures.

Le coffre de la banque
Examinons quelles clés ne sont pas données à chacun des responsables. Le directeur, qui aura toutes les clés, n'est pas concerné. Appelons A, B, C, D et E le directeur adjoint et les chefs de service. Le tableau ci-après contient, selon leurs numéros, les serrures dont les clés ne sont pas attribuées. Chacun possèdera toutes les clés qui ne sont pas mentionnées dans sa colonne.
Pour que A ne puisse ouvrir la porte, qu'avec l'un des deux autres, il doit lui manquer la clé de la serrure 1, que tous les autres possèdent.
De même, pour que chaque groupe de deux chefs de service ne puisse ouvrir, il doit leur manquer une même clé, que les autres possèdent.
Cela exige au total 7 clés.

A	B	C	D	E
1	2	2	3	4
	3	5	5	6
	4	6	7	7

Trois boules

On tire une boule de la boîte marquée "Blanc Noir". L'étiquette étant fausse, cette boîte ne peut contenir que deux boules noires, ou deux blanches, ce que l'on sait immédiatement après le tirage. Si cette couleur est, par exemple, la couleur blanche, on en conclut que la boîte marquée "Noir-Noir" a un contenu "Blanc-Noir", et que la boîte "Blanc-Blanc" est en réalité "Blanc-Noir".

Surpopulation

Aristide a raison au début de son raisonnement: si l'on remonte quelques générations en arrière, on double le nombre d'ancêtres à chaque étape. Mais vient un moment où l'on ne double plus. Supposons par exemple que l'on ait effectivement doublé le nombre d'ancêtres jusqu'à la 7ième génération, c'est à dire que l'on considère les 128 ancêtres de Pacôme, sept générations en arrière. Ces 128 personnes ont effectivement chacune deux parents, mais il est très probable que les parents de certains seraient aussi les parents d'autres. Il ne peut par exemple y avoir que 240 personnes seulement qui constituent l'ensemble des parents des 128 ancêtres de Pacôme, sept générations en arrière.

Rêve prémonitoire

En soi, la probabilité de rêver la nuit d'un ancien ami et de le rencontrer le lendemain dans la rue est extrêmement faible; il est normal d'être très troublé par cet événement. Pourtant, ce type de manifestation n'a rien de vraiment exceptionnel: certes, cet événement précis était très improbable, mais il existe au cours de toute une vie un grand nombre d'événements potentiels très improbables. Et il y a tellement d'événements très improbables qu'il n'est pas du tout improbable qu'un d'entre eux se produise un jour...

Si l'on fixe à l'avance un événement très improbable (par exemple, trouver les 6 chiffres du loto) alors effectivement, il serait extrêmement surprenant que cet événement se produise. Par contre, dans le vaste ensemble des événements improbables, il n'est pas du tout anormal que l'un d'entre eux se réalise. On peut résumer tout cela par la phrase: "L'improbable a toutes les chances de se produire".

Date de naissance

Amédée a des risques importants de perdre son pari, beaucoup plus élevés que son analyse sommaire lui fait croire. Supposons que les dates de naissances soient réparties aléatoirement au cours de l'année; sur cette base, calculons la probabilité de gagner d'Amédée (en réalité, les dates de naissances sont souvent concentrées au printemps: cela ne fait que diminuer encore les chances d'Amédée).

Il faut tout d'abord que le deuxième passager ne soit pas né le même jour que le premier, c a d une probabilité de 364/365. En supposant que cela soit le cas, il faut de plus que le troisième passager ne soit né ni le jour du premier, ni le jour du deuxième, c a d, une probabilité de 363/365. En continuant avec le quatrième, on trouve 362/365, et ainsi de suite jusqu'au trentième: 336/365. Finalement, la probabilité qu'aucun des passagers ne soit né le jour d'un autre est de $(364/365) \times (363/365) \times \ldots \times (336/365)$. En calculant ce produit, on trouve environ 0,29, donc Amédée a moins de 30% de chances de gagner !

La fin de l'humanité est pour demain

L'argumentation de Pacôme est un casse-tête récent, publié pour la première fois en 1989 par John Leslie, et sans doute formulé oralement au cours d'une conférence en 1983, par Brandon Carter. On le désigne généralement sous le terme "d'argument de l'apocalypse".

Beaucoup ont cherché des failles dans le raisonnement, mais personne n'a trouvé de réfutation vraiment probante. Bref, l'argument de l'apocalypse passionne et inquiète ! Pour plus de détails à son sujet, vous pouvez lire la rubrique "Logique et calcul" dans "Pour la Science" no 191, de septembre 1993 (vous y trouverez aussi l'adresse de John Leslie, au cas où vous désireriez lui faire part de vos idées; vous pouvez sans problème lui écrire en français).

Fille ou garçon ?

Madame Lepyon a raison de trouver que son mari se trompe ; il y a en réalité deux fois plus de chances (ou de malchances ?) que Dominique soit un garçon plutôt qu'une fille. Considérons en effet l'ensemble des couples ayant deux enfants. A chaque naissance, la probabilité d'avoir une fille est la même que celle d'avoir un garçon ; un simple tableau à double entrée montre immédiatement que 25% des couples ont deux filles, 25% deux garçons, et 50% une fille et un garçon.

	Fille	Garçon
Fille	Fille - fille	Fille - Garçon
Garçon	Fille - garçon	Garçon - Garçon

Les voisins des Lepyon font partie des 75% qui ont une fille ; comme les 2/3 de ceux-ci ont en réalité une fille et un garçon, et 1/3 de ceux-ci ont deux filles, il est donc deux fois plus probable que l'autre enfant, Dominique, sera un garçon.

Tous les chiffres sont égaux ?

Le raisonnement d'Aristide est faux, car il est basé sur le fait que le premier chiffre du nombre d'habitants d'une commune française a autant de chances d'être un "1" plutôt qu'un "2", ou un "3", etc.. En fait, plus le chiffre est petit, plus il a de chances de figurer en tête du nombre. Ce n'est pas une particularité des communes françaises: la même propriété se retrouverait avec n'importe quelle autre liste de valeurs, par exemple, la surface des îles du Pacifique, ou la hauteur des montagnes d'Asie. Ce phénomène est connu sous le nom de "loi de Benford": la probabilité qu'un nombre commence par n est égale à log (n+1) – log (n), log étant le logarithme décimal. On en conclut qu'Aristide a moins de 40% de chances de gagner, alors qu'il croyait en avoir plus de 55% ! A défaut d'une explication mathématique rigoureuse, on se contentera d'une explication intuitive du phénomène, inspirée par Ian Stewart. Supposons que l'on choisisse au hasard une rue, puis ensuite, toujours au hasard, une maison dans cette rue, et que l'on regarde le premier chiffre de son numéro.
Si la rue contient 19 maisons, il y a 10 fois plus de maisons dont le nombre commence par "1" plutôt que par "9". Si la rue contient 47 maisons, il y a toujours beaucoup plus de maisons commençant par "1" plutôt que par "9". Le nombre "9" finit péniblement par rattraper son retard lorsque l'on en arrive à considérer des rues ayant entre 90 et 100 maisons, mais ce retard recommence à se creuser dès que l'on entre dans le domaine des maisons contenant entre 100 et 200 maisons ! Bref, les petits chiffres sont toujours en avance sur les grands, ce qui leur confère une présence plus fréquente que ces derniers.

La multiplication des grains

Il est tout simplement impossible de recueillir une telle quantité de grains de blé. En accumulant tous les grains de blé issu de la culture sur la Terre entière, il faudrait environ 5000 ans pour y arriver.
Le nombre de grains de blé sur les différentes cases de l'échiquier suit une progression géométrique. A chaque fois le nombre de grains est multiplié par 2 (c'est ce qu'on appelle la raison de la suite que l'on note q). Ces suites géométriques régissent aussi l'énorme augmentation de certaines populations animales dans certaines circonstances (criquets, souris, …).

La somme des n premiers termes d'une suite géométrique est donné par la formule suivante où q est la raison de la suite et a le premier terme (1 pour notre exemple).

$$S_n = a \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

Dans notre cas, il s'agit de calculer la somme des 64 premiers termes de la suite géométrique de raison q = 2 et de premier terme a = 1.

$$S_{64} = 1 \times \frac{1-2^{64}}{1-2}$$

Ce qui donne 18 446 744 073 709 551 615.

Soit en français dix huit quadrillons quatre cent quarante six trillons sept cent quarante quatre billions soixante treize milliards sept cent neuf millions cinq cent cinquante et un mille six cent quinze

Le bouche à oreille

A 9 h 00 il y a 4 personnes au courant : Mademoiselle Jacasse, Berthe, Germaine et Paulette.
A 9 h 05 il y a 13 personnes au courant : 4 + (3 $\times$ 3) = 13. Soit 9 nouvelles personnes au courant.
A 9 h 10 il y a 40 personnes au courant : 13 + (9 $\times$ 3). Soit 27 nouvelles personnes au courant.
A 9 h 15 il y a 121 personnes au courant : 40 + (27 $\times$ 3). Soit 81 nouvelles personnes au courant.
Il s'agit d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 3
La somme des n premiers termes d'une suite géométrique est donné par la formule suivante où q est la raison de la suite et a le premier terme (1 pour notre exemple).

$$S_n = a \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

Dans notre cas, il s'agit de calculer la somme des 12 premiers termes de la suite géométrique de raison q = 3 et de premier terme a = 1.

Au bout d'une heure (12 $\times$ 5 minutes), il y a :

$$S_{12} = 1 \times \frac{1 - 3^{12}}{1 - 3}$$

$$S_{12} = 265\ 720$$

Soit 265 720 personnes au courant.

Cinq minutes plus tard il y a 797 160 personnes au courant (265 720 $\times$ 3). Et cinq minutes après : 2 391 480.
A 10 h 10 tous les Parisiens ont eu vent d'une rumeur lancée à 9h 00 par une personne.

Il va de soi que ce calcul est théorique car il faut que chaque personne partage la rumeur avec trois autres personnes et on suppose que personne n'entend la rumeur plusieurs fois.