http://maths-sciences.fr

SOMMAIRE

LE SYSTÈME DÉCIMAL

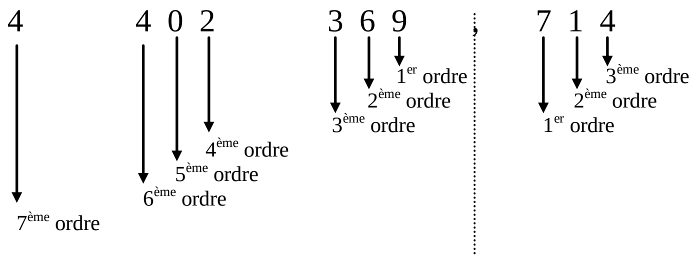
Le système décimal utilise 10 chiffres : 0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. Ces chiffres constituent les lettres de l'alphabet pour le système décimal :

Exemple : 96547, 513 est un nombre décimal.

Un nombre (*un mot*) est composé de caractères appelés **chiffres** (*lettres*).
A chaque chiffre, lui est associé un **ordre**.
Chaque ordre correspond à un **préfixe**.

Pour lire un nombre composé de plusieurs chiffres il est utile de le décomposer en classe de 3 chiffres. Lorsqu'on écrit un nombre, on prévoit un espace entre chaque classe.

Exemple : 4 millions 402 mille 369 unités virgule 714 millièmes



Classe des billions			Classe des milliards			Classe des millions			Classe des mille			Classe des unités					
centaines	dizaines	unités	centaines	dizaines	unités	centaines	dizaines	unités	centaines	dizaines	unités	centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	millièmes
		téra			giga			méga			kilo	hecto	déca		déci	centi	milli
		T			G			M			k	h	da		d	c	m
Partie entière												Partie décimale					

Un peu d'histoire…
La virgule qui sépare les entiers des décimales apparaît pour la première fois en 1617 dans le traité écrit par l'écossais Napier (dit Neper). Elle fut adoptée aussitôt par l'astronome W. Snell van Royen.

http://maths-sciences.fr

ENCADRER UN NOMBRE

I) Comparaison de deux nombres

Pour comparer 312,36 et 312,4 :

On compare d'abord leurs parties entières. Si la partie entière est la même, on compare alors leur partie décimale.

Dans notre exemple, les deux nombres ont même partie entière (312) on compare donc leurs parties décimales.

Pour comparer les parties décimales (ou les parties entières), on regarde les chiffres de même ordre en commençant par la gauche.

$3 < 4$ (3 est plus petit que 4) donc $312{,}36 < 312{,}4$.

Une autre méthode consiste à faire en sorte que les nombres à comparer aient autant de chiffres derrière la virgule. On peut rajouter autant de zéros que l'on veut derrière le dernier chiffre de la partie décimale.

On a donc 312,36 et 312,40 et comme $36 < 40$ on a $312{,}36 < 312{,}40$

II) Valeur approchée – arrondi

1) Valeur approchée

On obtient des **valeurs approchées** d'un nombre par encadrement.

Le nombre 2,3486 peut être encadré :

- à l'unité : $2 < 2{,}3486 < 3$
- au dixième : $2{,}3 < 2{,}3486 < 2{,}4$
- au centième : $2{,}34 < 2{,}3486 < 2{,}35$
- au millième : $2{,}348 < 2{,}3486 < 2{,}349$

↓	↓
valeurs approchées par défaut	valeurs approchées par excès

2) Arrondi

L'arrondi est la valeur approchée

- par défaut si le chiffre qui suit est 0, 1, 2, 3, 4
- par excès si le chiffre qui suit est 5, 6, 7, 8, 9

L'arrondi de 2,3486 à l'unité près est : 2

au dixième près est : 2,3

au centième près : 2,35

au millième près : 2,349

Remarque

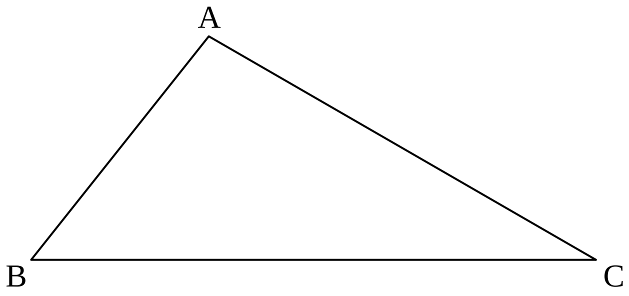
On retrouve plusieurs expressions équivalentes :

- à l'unité près, à l'entier près, à 1 près, à 10^{0} près.
- au dixième près, à 1/10 près, à 0,1 près, à 10^{-1} près.
- au centième près, à 1/100 près, à 0,01 près, à 10^{-2} près.
- au millième près, à 1/1000 près, à 0,001 près, à 10^{-3} près.

FIGURES : DÉFINITIONS - PROPRIÉTÉS
MESURES DE LONGUEUR

Triangles

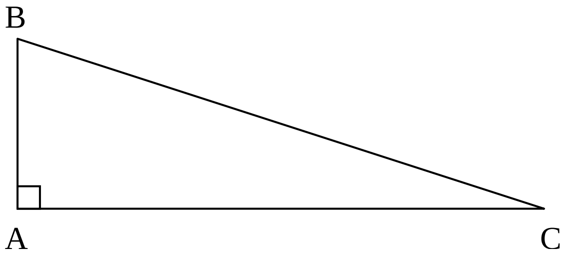
Triangle



Un triangle est un polygone à 3 cotés. Les points A, B, et C sont les sommets du triangle.

$$A + B + C = 180°$$

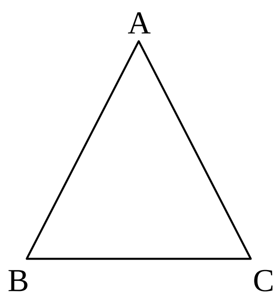
Triangle rectangle



Un triangle rectangle est un triangle qui a un angle droit.

$$A = 90°$$
$$B + C = 90°$$

Triangle isocèle

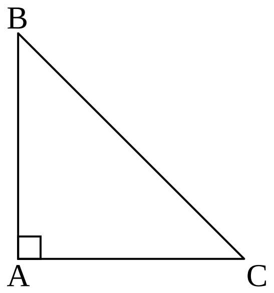


Un triangle isocèle est un triangle qui a deux cotés de même longueur.

$$AB = AC$$
$$B = C$$

http://maths-sciences.fr

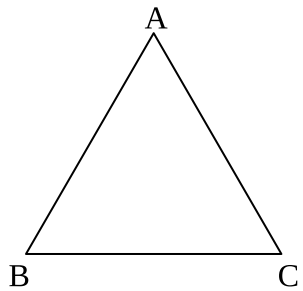
Triangle rectangle-isocèle



Un triangle rectangle-isocèle a un angle droit compris entre deux côtés de même longueur.

$$A = 90°$$
$$AB = AC$$
$$B = C = 45°$$

Triangle équilatéral

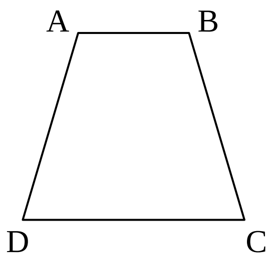


Un triangle équilatéral est un triangle qui a trois côtés de même longueur.

$$AB = AC = BC$$
$$A = B = C = 60°$$

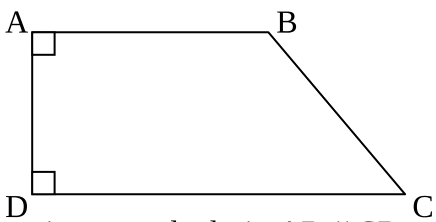
Quadrilatères

Trapèze



Un trapèze est un quadrilatère qui a deux côtés parallèles : AB // DC

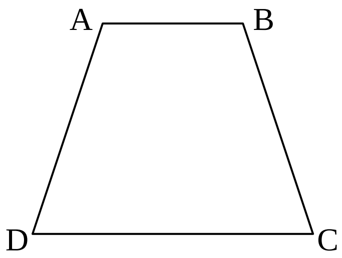
Trapèze rectangle



Un trapèze rectangle est un trapèze qui a un angle droit. AB // CD et $A = D = 90°$

http://maths-sciences.fr

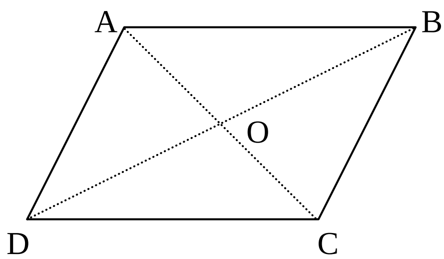
Trapèze isocèle



Un trapèze isocèle est un trapèze qui a deux cotés de même longueur.

D = C
AB // CD
AD = BC

Parallélogramme



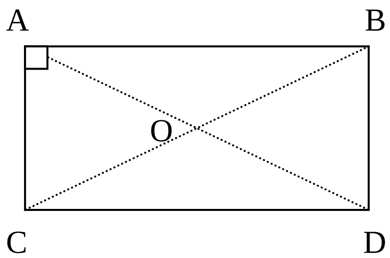
Un parallélogramme est un quadrilatère dont les cotés opposés sont parallèles.
AB // CD
AD // BC

Les cotés opposés sont égaux : AB = DC
AD = BC

Les diagonales se coupent en leur milieu : OA = OC
OB = OD

O est le centre de symétrie du parallélogramme.

Rectangle

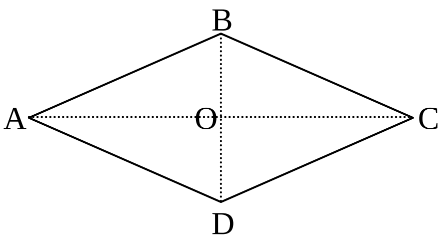


Un rectangle est un parallélogramme qui a un angle droit : A = 90°

Les diagonales ont même longueur : AC = BD.

http://maths-sciences.fr

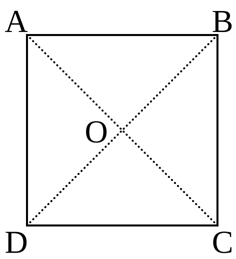
Losange



Un losange est un parallélogramme qui a deux cotés consécutifs de même longueur AB = BC.

Les diagonales sont perpendiculaires $AC \perp BD$.

Carré



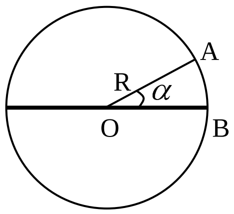
Un carré est un parallélogramme qui est à la fois un losange et un rectangle.

$$A = 90°$$

Les diagonales sont de même longueur et perpendiculaires $AC \perp BD$
AC = BD

Les quatre cotés sont de même longueur AB = BC = CD = DA.

Cercle



Un cercle est l'ensemble des points équidistants d'un, point O, appelé centre du cercle.
Rayon R
Diamètre D = 2R
Longueur du cercle = périmètre = $\pi \times D$
Longueur de l'arc $AB = \pi \times D \times \dfrac{\alpha}{360}$

http://maths-sciences.fr

CONVERSION DES UNITÉS DE LONGUEUR

I) Mesurer une longueur

Mesurer une longueur c'est chercher combien de fois elle renferme une longueur déterminée, appelée : unité de longueur.

II) Le mètre

L'unité de longueur du système international est le mètre (m).

1) Les multiples du mètre

On appelle multiples du mètre, les unités qui sont 10, 100, 1000 fois plus grandes que le mètre.

Les multiples du mètre sont :

Le décamètre (dam) ; 1 dam = 10 m
L'hectomètre (hm) ; 1 hm = 100 m
Le kilomètre (km) ; 1 km = 1000 m

km	hm	dam	m
1	0	0	0
	1	0	0
		1	0

Exemples :

km	hm	dam	m	
	4	5	0	= 4 hm et 5 dam
7	2	9	0	= 7 km et 290 m
		8	1	= 8 dam et 1 m

2) Les sous-multiples du mètre

On appelle sous-multiples du mètre, les unités qui sont 10, 100, 1000 fois plus petites que le mètre.

Les sous-multiples du mètre sont :

Le décimètre (dm) ; 1 dm = 0,1 m
Le centimètre (cm) ; 1 cm = 0,01 m
Le millimètre (mm) ; 1 mm = 0,001 m

m	dm	cm	mm
0,	1	0	0
0,	0	1	0
0,	0	0	1

Exemples :

m	dm	cm	mm	
	3	0	2	= 3 dm et 2 mm
1	6	2	7	= 1 m et 627 mm
		9	8	= 9 cm et 8 mm

III) Autres unités de longueur

Il existe d'autres unités de longueur : le mille ou mille marin (1852m), le pied (304,8 m), …

http://maths-sciences.fr

TABLEAU DE CONVERSION DES UNITES DE LONGUEUR

km	hm	dam	m	dm	cm	mm

http://maths-sciences.fr

CONVERSION DES UNITÉS D'AIRE

I) Mesurer une surface

Mesurer une surface c'est chercher combien de fois elle renferme une surface déterminée, appelée : unité d'aire.

II) Le mètre carré

L'unité de d'aire du système international est le mètre-carré (m^2).

1) Les multiples du mètre-carré

On appelle multiples du mètre-carré, les unités qui sont 100, 10 000, 1 000 000 fois plus grandes que le mètre-carré.

Les multiples du mètre-carré sont :

Le décamètre-carré (dam^2) ; 1 dam^2 = 100 m^2
L'hectomètre-carré (hm^2) ; 1 hm^2 = 10 000 m^2
Le kilomètre-carré (km^2) ; 1 km^2 = 1 000 000 m^2

km^2		hm^2		dam^2		m^2	
							3
			7	2	1		
	4	5	3	8			

3 m^2 = 0,03 dam^2 = 0,0003 hm^2 = 0,000003 km^2
721 dam^2 = 7,21 hm^2 =72100 m^2 = 0,0721 km^2
4,538 km^2 = 453,8 hm^2 = 45 380 dam^2 = 4 538 000 m^2

2) Les sous-multiples du mètre-carré

On appelle sous-multiples du mètre-carré, les unités qui sont 100, 10 000, 1 000 000 fois plus petites que le mètre-carré.

Les sous-multiples du mètre-carré sont :

Le décimètre-carré (dm^2) ; 1 dm^2 = 0,01 m^2
Le centimètre-carré (cm^2) ; 1 cm^2 = 0,0001 m^2
Le millimètre-carré (mm^2) ; 1 mm^2 = 0,000001 m^2

m^2		dm^2		cm^2		mm^2	
						4	5
			5	6	1	9	2
	7	4	3				

45 mm^2 = 0,45 cm^2 = 0,0045 dm^2 = 0,000045 m^2
5,6192 dm^2 = 561,92 cm^2 = 56192 mm^2 = 0,056192 m^2
7,43 m^2 = 743 dm^2 = 74300 cm^2 = 7430000 mm^2

III) Autres unités d'aire

Il existe d'autres unités de longueur : l'hectare (ha), l'are (a), le centiare (ca).

1 ha = 10 000 m^2 ; 1 a = 100 m^2 ; 1 ca = 1 m^2

http://maths-sciences.fr

TABLEAU DE CONVERSION DES UNITES D'AIRE

km^2		hm^2		dam^2		m^2		dm^2		cm^2		mm^2	
			ha		a		ca						

http://maths-sciences.fr

CONVERSION DES UNITÉS DE VOLUME

I) Mesurer un volume

Mesurer un volume c'est chercher combien de fois il renferme un volume déterminé, appelé : unité de volume.

II) Le mètre cube

L'unité de d'aire du système international est le mètre-cube (m^3).

1) Les multiples du mètre-cube

On appelle multiples du mètre-cube, les unités qui sont 1000, 100 000, 1000 000 000 fois plus grandes que le mètre-cube.

Les multiples du mètre-cube sont :

Le décamètre-cube (dam^3) ; $1\ dam^3 = 1000\ m^3$
L'hectomètre-cube (hm^3) ; $1\ hm^3 = 1\ 000\ 000\ m^3$
Le kilomètre-cube (km^3) ; $1\ km^3 = 1\ 000\ 000\ 000\ m^3$

km^3			hm^3			dam^3			m^3		
										1	2
								4	7		
			7	1	1						

$12\ m^3 = 0{,}012\ dam^3 = 0{,}000\ 012\ hm^3$
$4{,}7\ dam^3 = 4700\ m^3 = 0{,}0047\ hm^3$
$711\ hm^3 = 0{,}711\ km^3 = 711\ 000\ dam^3$

2) Les sous-multiples du mètre-cube

On appelle sous-multiples du mètre-cube, les unités qui sont 1 000, 1 000 000, 1 000 000 000 fois plus petites que le mètre-cube.

Les sous-multiples du mètre-cube sont :

Le décimètre-cube (dm^3) ; $1\ dm^3 = 0{,}001\ m^3$
Le centimètre-cube (cm^3) ; $1\ cm^3 = 0{,}000\ 001\ m^3$
Le millimètre-cube (mm^3) ; $1\ mm^3 = 0{,}000\ 000\ 001\ m^3$

m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
							1	4			
					1	9	5				
			6	4	2	5					

$14\ cm^3 = 0{,}014\ dm^3 = 0{,}000\ 014\ m^3$
$1{,}95\ dm^3 = 1950\ cm^3 = 1\ 950\ 000\ mm^3$
$642{,}5\ dm^3 = 0{,}6425\ m^3 = 642\ 500\ cm^3$

III) Autres unités de volume

Il existe d'autres unités de longueur : le litre (L) et tous ses multiples.

$$1\ L = 1\ dm^3$$

http://maths-sciences.fr

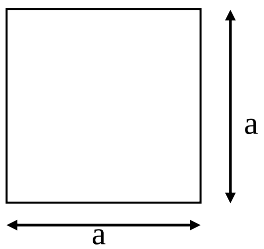
TABLEAU DE CONVERSION DES UNITES DE VOLUME

km^3			hm^3			dam^3			m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
												hL	daL	L	dL	cL	mL			

http://maths-sciences.fr

PÉRIMÈTRE ET AIRE DES PRINCIPALES FIGURES GÉOMÉTRIQUES

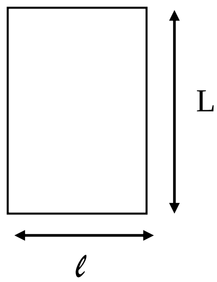
CARRE



Périmètre = $4 \times a$

Aire = $a \times a$
$= a^2$

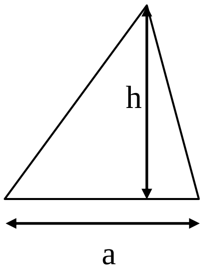
RECTANGLE



Périmètre = $2 \times L + 2 \times \ell$

Aire = $L \times \ell$

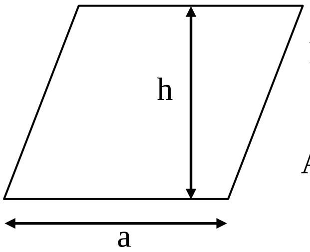
TRIANGLE



Périmètre = somme des trois cotés

Aire = $\dfrac{a \times h}{2}$

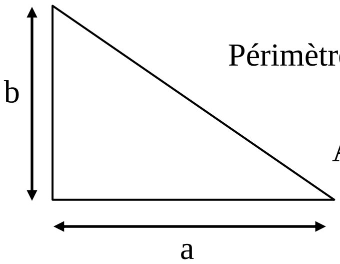
PARALLELOGRAMME



Périmètre = somme des quatre cotés

Aire = $a \times h$

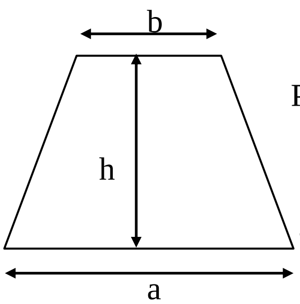
TRIANGLE RECTANGLE



Périmètre = somme des trois cotés

Aire = $\dfrac{a \times b}{2}$

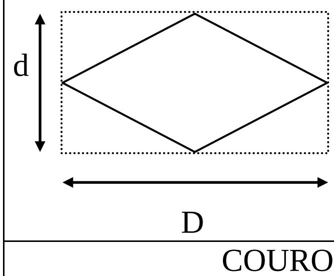
TRAPEZE



Périmètre = somme des quatre cotés

aire = $\dfrac{(a + b) \times h}{2}$

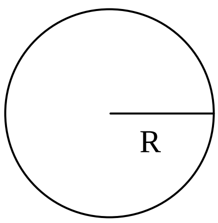
LOSANGE



Périmètre = somme des quatre cotés

Aire = $\dfrac{D \times d}{2}$

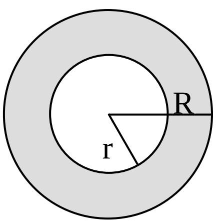
DISQUE



Périmètre = $2 \times \pi \times R$

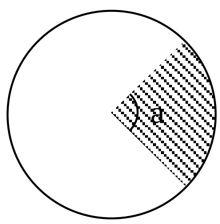
Aire = $\pi \times R \times R$
$= \pi \times R^2$

COURONNE



Aire = $\pi \times R \times R - \pi \times r \times r$
$= \pi \times R^2 - \pi \times r^2$

SECTEUR CIRCULAIRE



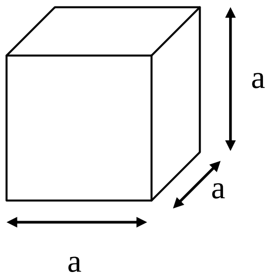
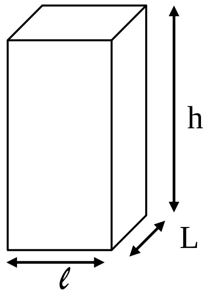
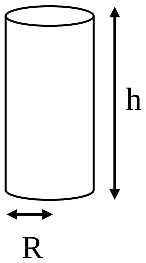
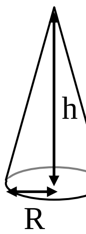
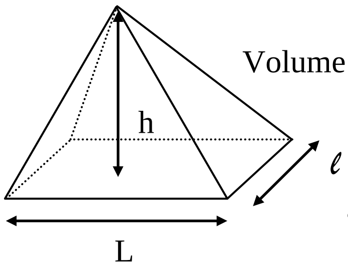
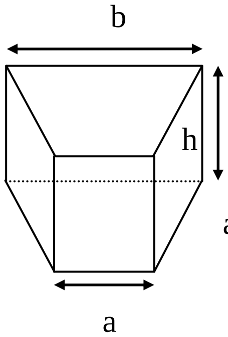
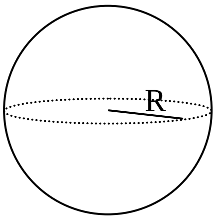
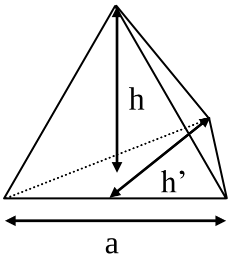
Périmètre = $2 \times \pi \times R \times \dfrac{a}{360}$

Aire = $\pi \times R \times R \times \dfrac{a}{360}$

(avec a en degrés)

http://maths-sciences.fr

VOLUMES DES PRINCIPAUX SOLIDES

CUBE  Volume = $a \times a \times a$	PARALLEPIPEDE  Volume = $L \times \ell \times h$
CYLINDRE  volume = $\text{base} \times h$ avec base = $\pi \times R \times R \times h$	CONE  Volume = $\dfrac{\text{base} \times h}{3}$ Avec base $\pi \times R \times R$
PYRAMIDE  Volume = $\dfrac{\text{base} \times h}{3}$ avec base = $L \times \ell$	PRISME  Volume = $\text{base} \times h$ avec base = $\dfrac{(a + b) \times h}{2}$
BOULE  Aire = $4 \times \pi \times R \times R$ Volume = $\dfrac{4}{3} \times \pi \times R \times R \times R$	TETRAEDRE  Volume = $\dfrac{\text{base} \times h}{3}$ avec base = $\dfrac{a \times h'}{2}$

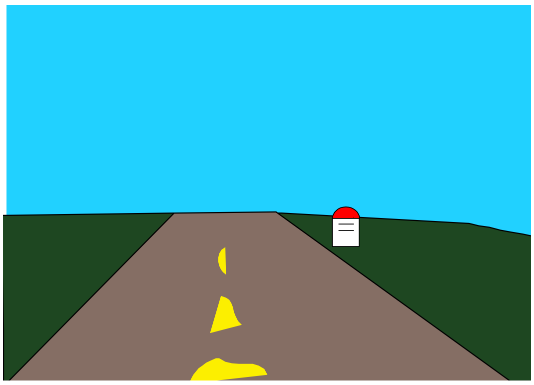
PARTAGES ÉGAUX – INTERVALLES

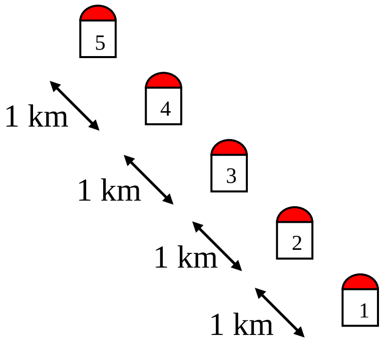
On peut faire une répartition en parts égales

⇨ Le contenu d'une bouteille de vin d'une contenance de 75 cL est répartie en 5 verres identiques.

Pour trouver la contenance de chaque verre, il faut procéder à la division : 75/5 = 15.
Soit 15 cL.

⇨ Une route longue de 4 km est bordée de 5 bornes kilométriques.



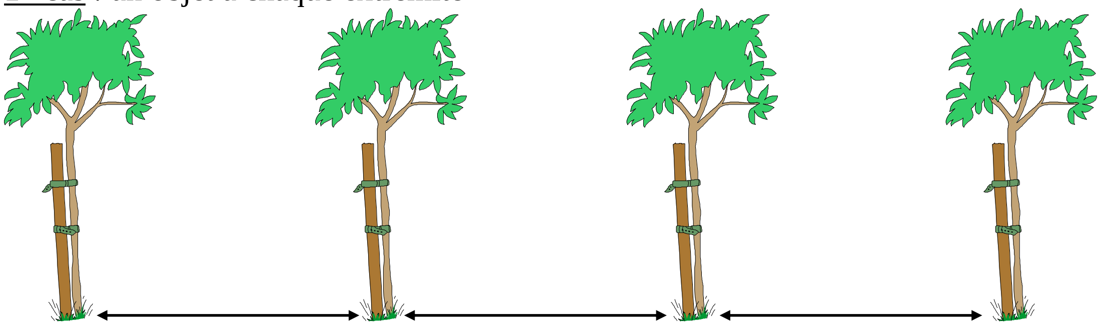


La distance entre deux bornes est égale à : $\frac{4000}{4}$ = 1000 soit 1 km.

Attention : Le nombre d'intervalles et le nombre d'objets sont différents.
La longueur de la route est égale au produit du nombre d'intervalles par la distance entre chaque intervalle.

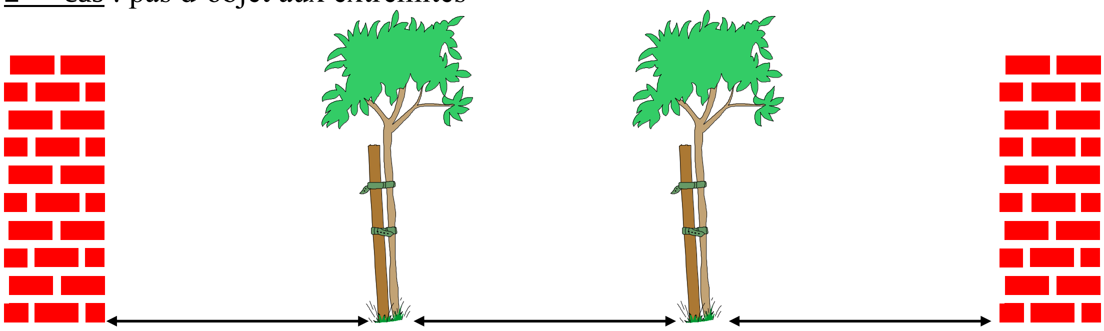
http://maths-sciences.fr

1er cas : un objet à chaque extrémité



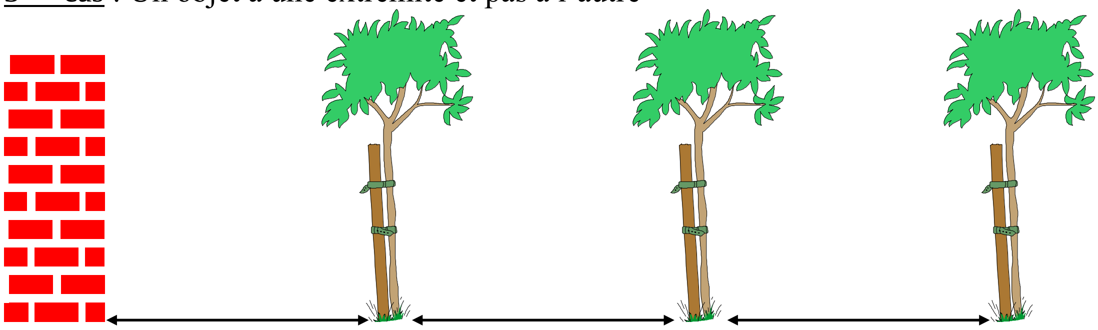
Un intervalle de moins que d'objets :
3 intervalles et 4 arbres

2ème cas : pas d'objet aux extrémités



Un intervalle de plus que d'objets :
3 intervalles et 2 arbres

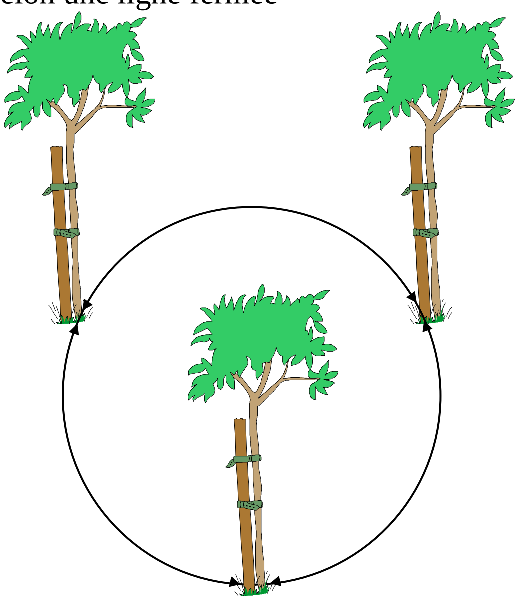
3ème cas : Un objet à une extrémité et pas à l'autre



Autant d'intervalle que d'objets :
3 intervalles et 3 arbres

Il y a autant d'intervalle que d'objets : 3 intervalles et 3 arbres.

4ème cas : Objets disposés selon une ligne fermée



Autant d'intervalle que d'objets :
3 intervalles et 3 arbres

http://maths-sciences.fr

PARTAGES INÉGAUX

I) Introduction

Certains problèmes peuvent donner lieu à une répartition en parts inégales.

Exemple : Une mère donne 10 € d'argent de poche à ses deux enfants. L'aîné reçoit 7 €.

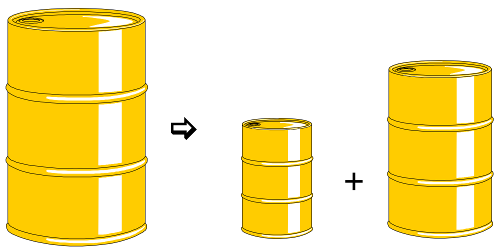
On exprime alors une part par rapport à l'autre :

Type 1
La part de l'aîné dépasse celle de son jeune frère de 4 €.
Part du plus jeune : 10 - 7 = 3 soit 3 €

Type 2
La part de l'aîné est les 3/7 de celle de son jeune frère.
Part du plus jeune : $\frac{3}{7} \times 7 = 3$ soit 3 €

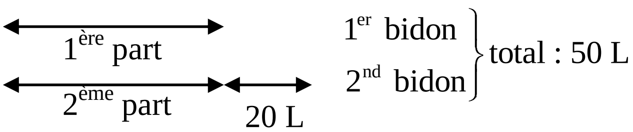
II) Application : Problème du type 1

Une quantité de 50 litres d'essence est à répartir dans deux bidons. Le second bidon a un volume supérieur de 20 litres à celui du premier. Quelle est la capacité de chacun ?



1$^{\text{ère}}$ méthode

➪On traduit l'énoncé sous forme d'un croquis.
On représente deux parts égales. A l'extrémité de l'une on ajoute le « surplus » (ici 20 litres).



La somme de ces deux parts est égale à la quantité donnée au départ (50 L) moins le surplus du second bidon (20 L) soit :
50 – 20 = 30
30/2 = 15
La capacité du premier bidon correspond à la première part soit 15 L.
La capacité du second bidon correspond à la somme de la deuxième part et du surplus :
15 +20 = 35 soit 35 L

On vérifie que 35 + 15 = 50.

2$^{\text{ème}}$ méthode

⇨Au lieu de passer par le biais d'un dessin, on pourrait se servir du calcul algébrique des équations. Pour cela on choisit une inconnue : soit x la capacité du 1er bidon.
La capacité du 2nd bidon est égale à la somme de celle du premier (x) et de 20 : x + 20.
L'énoncé nous dit que la quantité totale d'essence est de 50 L. On doit donc avoir :

$$\underset{1^{er}\text{bidon}}{x} + \underbrace{x + 20}_{2^{nd}\ \text{bidon}} = 50$$

$$\text{soit } 2x = 50 - 20$$

$$2x = 30$$

$$x = \frac{30}{2}$$

$$x = 15$$

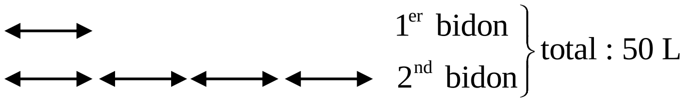
La capacité du premier bidon correspond à x = 15 soit 15 L.
La capacité du second bidon correspond à x + 20 soit 35 L.

III) Application : Problème du type 2

Une quantité de 50 litres d'essence est à répartir dans deux bidons. Le second bidon a un volume 4 fois supérieur à celui du premier. Quelle est la capacité de chacun ?

1ère méthode

⇨On traduit l'énoncé sous forme d'un croquis :



On compte le nombre de parts égales. Il y en a 5.
On recherche maintenant la valeur d'une ce ces parts. Pour cela, on divise la quantité totale par le nombre de parts et on a : $\frac{50}{5} = 10$
Le volume d'une part est 10 L.
La capacité du premier bidon correspond à une part soit 10 L.
La capacité du second bidon correspond aux 4 parts soit 40 L.
Vérifier que 40 + 10 = 50.

2ème méthode

⇨Au lieu de passer par le biais d'un dessin, on pourrait se servir du calcul algébrique des équations. Pour cela on choisit une inconnue : soit x la capacité du 1er bidon.
La capacité du 2nd bidon est 4 fois supérieur à celle du premier (x) : 4x.
L'énoncé nous dit que la quantité totale d'essence est de 50 L. On doit donc avoir :

$$\underset{1^{er}\text{bidon}}{x} + \underset{2^{nd}\ \text{bidon}}{4 \times x} = 50$$

$$\text{soit } 5x = 50$$

$$x = \frac{50}{5}$$

$$\text{d'où } x = 10$$

La capacité du premier bidon correspond à x = 10 soit 10 L.
La capacité du second bidon correspond à 4x soit 40 L.

http://maths-sciences.fr

LA PROPORTIONNALITÉ

I) Grandeurs proportionnelles

Le tableau ci-dessous indique la quantité de carburant nécessaire pour pouvoir parcourir les distances données avec une automobile. Ces données correspondent à un trajet effectué sur circuit (vitesse constante et égale à 90 km/h).

Distance en km (x)	50	100	150	200	250	300	500	800
Consommation en L (y)	4	8	12	16	20	24	40	64

On constate que lorsque la distance est multipliée par 2, 3, 4, 5, … la consommation l'est aussi :

Distance en km (x)	50	100	150	200	250	300	500	800
Consommation en L (y)	4	8	12	16	20	24	40	64

Le rapport x/y est le même pour toutes les valeurs du tableau qui sont données.

$$\frac{50}{4} = \frac{100}{8} = \frac{150}{12} = \frac{200}{16} = \frac{250}{20} = \frac{300}{24} = \frac{500}{40} = \frac{800}{64} = 12{,}5$$

Ce rapport est égal au **coefficient de proportionnalité**.

La série de nombre 50 ; 100 ; 150 ; 200 ; 250 ; … est **proportionnelle** à la série de nombre 4 ; 8 ; 12 ; 16 ; 20 ; …
La distance parcourue est proportionnelle à la consommation.

II) Propriétés

1) Addition

Distance en km (x)	50	100	150	200	250	300	500	800
Consommation en L (y)	4	8	12	16	20	24	40	64

Pour connaître la consommation pour 150 km, il suffit de remarquer que 150 est la somme de 100 et de 50, et d'ajouter les consommations correspondantes à ces deux distances.

$$\frac{50}{4} + \frac{100}{8} = \frac{100+50}{8+4} = 12{,}5$$

2) Soustraction

Distance en km (x)	50	100	150	200	250	300	500	800
Consommation en L (y)	4	8	12	16	20	24	40	64

Pour connaître la consommation pour 50 km, il suffit de remarquer que 50 est la différence de 150 et de 100, et de soustraire les consommations correspondantes à ces deux distances.

$$\frac{150}{12} - \frac{100}{8} = \frac{150-100}{12-8} = 12{,}5$$

3) Produit

Distance en km (x)	50	100	150	200	250	300	500	800
Consommation en L (y)	4	8	12	16	20	24	?	64

L'égalité $\frac{50}{4} = \frac{100}{8}$ conduit à : $50 \times 8 = 4 \times 100$

Cela permet de trouver une valeur inconnue : $\frac{50}{4} = \frac{500}{?}$ $\qquad ? = 500 \times \frac{5}{50}$

III) Grandeurs inversement proportionnelles

On considère une voiture qui doit parcourir 90 km à vitesse constante sur un circuit.
Le tableau suivant donne les durées de parcours en fonction de la vitesse de la voiture :

Vitesse en km/h (v)	30	45	60	90	120	180
Durée en heure (t)	3	2	1,5	1	0,75	0,5

On constate que lorsque la vitesse est multipliée par 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; … la durée est divisée par 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; …

Les nombres 30, 45, 60, 90, 120, 180, … sont **inversement proportionnels** aux nombres :
3 ; 2 ; 1,5 ; 1 ; 0,75 ; 0,5 ; …

La vitesse est inversement proportionnelle à la durée. Il en découle que le produit de la vitesse par la durée est constant :

$$30 \times 3 = 45 \times 2 = 60 \times 1{,}5 = 90 \times 1 = 120 \times 0{,}75 = 180 \times 0{,}5 = 90$$

IV) Proportionnalité à plusieurs grandeurs

Une grandeur est proportionnelle à plusieurs autres grandeurs quand cette grandeur est proportionnelle au produit de ces autres grandeurs (et non pas à chacune d'entre elles prises séparément).

Prime (€)	300 €	600 €	525 €
Salaire mensuel (€)	1500 €	2000 €	3000 €
Durée de travail (mois)	8	12	7
Salaire annuel (€) (salaire mensuel $\times$ durée)	1500×8	2000×12	3000×7

$\times 0,025$

$$\frac{300}{1500 \times 8} = \frac{600}{2000 \times 12} = \frac{525}{3000 \times 7} = 0,025$$

La prime est proportionnelle au salaire annuel.

Attention

Elle n'est pas proportionnelle au salaire mensuel

$$\frac{300}{1500} \neq \frac{600}{2000} \neq \frac{525}{3000}$$

Elle n'est pas proportionnelle à la durée de travail

$$\frac{300}{8} \neq \frac{600}{12} \neq \frac{525}{7}$$

PARTAGES PROPORTIONNELS

Un partage proportionnel est un partage en parts inégales.

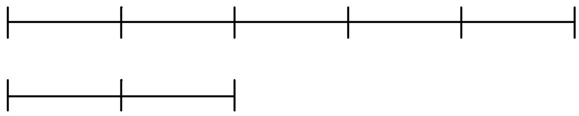
I) Partage proportionnel à une grandeur

Exemple : Une entreprise attribue une prime (S) de 1610 € à ses deux employés proportionnellement à leur ancienneté (respectivement 5 ans et 2 ans).

Le premier employé recevra 5 parts lorsque l'autre n'en recevra que 2.

s_1 : somme reçue par le 1er employé

s_2 : somme reçue par le 2nd employé



La somme S à donner aux employés peut être divisée en sept parts égales.
Le 1er employé en reçoit 5 et le 2nd employé en reçoit 2.

$$\frac{s_1}{5} = \frac{s_2}{2} = \frac{s_1+s_2}{5+2} = \frac{S}{7}$$

On peut consigner ces données dans un tableau de proportionnalité :

Somme reçue	s_1	s_2	$s_1 + s_2 = S$
Nombre de parts	5	2	$5 + 2 = 7$

$s_1 = \frac{5}{7} \times S = 1150$ soit 1150 € pour le 1er employé

$s_2 = \frac{2}{7} \times S = 460$ soit 460 € pour le 2nd employé

II) Partage proportionnel à plusieurs grandeurs

Exemple : L'entreprise attribue maintenant la prime (S) de 1610 € à ses deux employés proportionnellement à leur ancienneté et à leur nombre d'enfants (respectivement 3 et 4 enfants).

On calcule le nombre de parts pour chaque employé :

1er employé
$5 \times 3 = 15$

2nd employé
$2 \times 4 = 8$

Le nombre total de part est de 15 + 8 = 23 soit 23 parts.

Le 1er employé reçoit :
$15 \times \frac{1610}{23} = 350$ soit 1050 €

Le 2nd employé reçoit :
$8 \times \frac{1610}{23} = 560$ soit 560 €

PARTAGES INVERSEMENT PROPORTIONNELS

Un partage inversement proportionnel à des nombres revient à un partage proportionnel à l'inverse de ces nombres.

Exemple : Une entreprise attribue une prime (S) de 1610 € à ses deux employés selon un partage inversement proportionnel aux retards. Le 1^er^ employé totalise 7 retards dans l'année tandis que le 2^nd^ en totalise 16.

Ce problème revient à faire un partage proportionnel aux inverses des retards : $\frac{1}{7}$ et $\frac{1}{16}$.

En réduisant au même dénominateur, ces deux fractions se ramènent à :

$$\frac{1\times 16}{7\times 16}=\frac{16}{112} \quad \text{et} \quad \frac{1\times 7}{16\times 7}=\frac{7}{112}$$

A partir des numérateurs des fractions ci-dessus on déduit que le 1^er^ employé reçoit 16 parts et que le 2^nd^ en reçoit 7.

Il y a donc un total de 23 parts, chaque part correspondant à $\frac{S}{23}$, soit à une somme de :

$$\frac{1610}{23}=70 \text{ c'est à dire } 70\ €$$

Le 1^er^ employé reçoit 16 parts donc : $16\times 70 = 1120$ soit 1120 €.
Le 2^nd^ employé reçoit 7 parts donc : $7\times 70 = 490$ soit 490 €.

http://maths-sciences.fr

ÉCHELLES

Une carte, un plan, un croquis ou une maquette sont souvent munis d’une indication présentée sous la forme d’un rapport : l’échelle.

Exemple : une échelle 1/20 000 veut dire que 1 cm sur la carte correspond à 20 000 cm dans la réalité.

$$\text{Echelle} = \frac{\text{dimension sur la carte}}{\text{dimension réelle sur le terrain}}$$

Les dimensions sont exprimées dans la même unité.
On fera attention à garder une unité cohérente avec ce qui est mesuré sur le terrain :
- La distance entre deux villes s’exprime en km.
- La longueur d’un bâtiment route s’exprime en m.
- Les dimensions d’un livre s’expriment en cm.

Exemple

La distance entre Blois et Orléans est de 55 km

1) Quelle l’échelle de la carte ?
2) Quelle est la distance en km qui sépare Blois de Tours ?
3) Entre Tours et Orléans la distance est de 108 km. Calculer la distance en cm entre ces deux villes sur la carte. Vérifier.

1) On mesure, tout d'abord sur la carte, la distance entre les deux villes. On trouve 5,5 cm.

Il suffit d'appliquer le calcul de l'échelle : $\dfrac{\text{dimension sur la carte}}{\text{dimension réelle sur le terrain}}$

Comme 1 km $\hat{=}$ 100 000 cm, on a l'échelle qui est égale à $\dfrac{5{,}5}{55 \times 100000}$.

La carte est donc à l'échelle 1/1 000 000

2) On mesure, sur la carte, la distance entre les deux villes. On trouve 5,3 cm.

En appliquant la proportionnalité on obtient :

Sur la carte (en cm)	Sur le terrain (en cm)	Sur le terrain (en km)
1	1 000 000 cm	10
5,3	?	?

Soit $5{,}3 \times 10$ = 53 km ou 53 000 000 cm

La distance entre Tours et Blois est 53 km.

3) Entre Tours et Orléans la distance est de 108 km.

En appliquant la proportionnalité on obtient :

Sur la carte (en cm)	Sur le terrain (en cm)	Sur le terrain (en km)
1	1 000 000 cm	10
?	10 800 000	108

Soit $\dfrac{108}{10}$ = 10,8. Entre Tours et Orléans la distance sur la carte est de 10,8 cm.

LE SYSTÈME SEXAGÉSIMAL

Introduction

Le système sexagésimal, élaboré par les Babyloniens, utilise 60 chiffres (de 0 à 59) contrairement au système décimal qui n'en utilise que 10.

Le système sexagésimal est utilisé pour compter les secondes et les minutes dans les mesures des temps et des angles.

I) La mesure du temps ou des durées

1) Unités

L'unité du système international est la seconde (s).

Les multiples de la seconde

1 minute correspond à 60 secondes (1 min $\triangleq$ 60 s)
1 heure correspond à 60 minutes (1 h $\triangleq$ 60 min) ou à 3600 secondes ($60 \times 60 = 3600$).
Il existe d'autres multiples : le jour (24 heures), la semaine, le mois, l'année, le siècle…

Les sous-multiples de la seconde

Les sous-multiples de la seconde sont exprimés dans le système décimal :
Le dixième de seconde (0,1 s), le centième de seconde (0,01 s), le millième de seconde (0,001 s)…

2) Addition

Pour additionner deux ou plusieurs nombres exprimant des temps, on additionne séparément les secondes, les minutes et les heures puis on opère les conversions nécessaires si le nombre de secondes ou des minutes est supérieur à 59.

Exemple : calculons la somme de : 7 h 36 min 28 s + 3 h 43 min 44s

$$\begin{array}{lrrr} & 7\text{ h} & 36\text{ min} & 28\text{ s} \\ + & 3\text{ h} & 43\text{ min} & 44\text{ s} \\ \hline & 10\text{ h} & 79\text{ min} & 72\text{ s} \end{array}$$

mais 72 s c'est aussi 1 min et 12 s (72 – 60 = 12)
Le résultat peut donc s'écrire 10 h 80 min 12 s

Or de même, 80 min c'est aussi 1 h et 20 min (80 –60 = 20)

Le résultat est donc 11 h 20 min 12 s.

3) Soustraction

On soustrait séparément les secondes, les minutes et les heures.
Lorsque la soustraction des secondes est impossible, on ajoute 60 s au nombre des secondes du nombre qui doit être soustrait, et on retranche 1 min au nombre des minutes.
De la même manière, on peut transformer 1 heure en 60 min si le nombre de minutes n'est pas suffisant.

Exemple : calculons 15 h 37 min 28 s – 11 h 42 min 51 s

$$\begin{array}{rrr} 15\text{ h} & 37\text{ min} & 28\text{ s} \\ -\ 11\text{h} & 42\text{ min} & 51\text{ s} \\ \hline \end{array}$$

Le nombre de secondes (28) est insuffisant pour effectuer l'opération, nous transformons donc 15 h 37 min 28 s en 15 h 36 min 88 s ce qui ne change rien à la durée.

De la manière 36 est insuffisant pour lui soustraire 42, nous transformons donc à nouveau 15 h 36 min 88 s en 14 h 96 min 88 s.

L'opération devient donc :

$$\begin{array}{rrr} 14\text{ h} & 96\text{ min} & 88\text{ s} \\ -\ 11\text{h} & 42\text{ min} & 51\text{ s} \\ \hline 3\text{ h} & 54\text{ min} & 37\text{ s} \end{array}$$

4) Multiplication par un entier

On calcule séparément le produit des heures, des minutes et des secondes par le nombre entier puis on effectue les conversions nécessaires.

Exemple : calculons (15 h 17 min 28 s)$\times$6

$15\times 6 = 90$ soit 90 h ou encore : 3 jours 18 h
$17\times 6 = 102$ soit 102 min ou encore : 1 h 42 min
$28\times 6 = 168$ soit 168 s ou encore : 2 min 48 s

$$\begin{array}{rrrr} 3\text{ jours} & 18\text{ h} & & \\ & 1\text{ h} & 42\text{ min} & \\ & & 2\text{ min} & 48\text{ s} \\ \hline 3\text{ jours} & 19\text{ h} & 44\text{ min} & 48\text{ s} \end{array}$$

5) Division par un entier

On divise successivement, et dans cet ordre, les heures, les minutes et les secondes en convertissant et en ajoutant les restes aux unités de rang inférieur. Par exemple, le reste de la division des heures doit être transformé en minutes et ajouté au nombre de minutes avant de diviser celles-ci.

Exemple : calculons (34 h 38 min 29 s) / 13

34 h	38 min	29 s	13
- 26 h			2 h 39 min 53 s
8 h →	480 min		
	518 min		
	- 39		
	128 min		
	- 117 min		
	11 min →	660 s	
		689	
		- 65	
		39	
		0	

II) La mesure des angles

1) Unités

Une des unités les plus utilisée pour mesurer les angles est le degré (°).

Les sous-multiples du degré

Les sous-multiples du degré sont :

La minute (’) : 1° ≙ 60’

La seconde (’’) : 1’ ≙ 60’’

Remarque : Les symboles ’ et ’’ sont réservés aux mesures d’angles.

2) Opérations

Les règles d’opération sont identiques à celles des temps.

III) La conversion sexagésimale - décimale

1) Sens sexagésimal → décimal

En divisant un nombre de secondes par 60 on obtient un nombre décimal de minutes (avec un nombre de minutes on obtient un nombre d’heures).

Exemple : 3 h 18 min

18 / 60 = 0,3 donc 18 min ≙ 0,3 h.
d’où 3 h 18 min ≙ 3 h + 0,3 h ≙ 3,3 h.

Si on veut transférer un nombre de secondes en heure il faut le diviser par 3600.

Exemple : 3 h 18 min 20 s

3 h 18 min 20 s $\triangleq$ 3 h 1100 s   ($18 \times 60 + 20$).
1100/3600 = 0,3055   donc 1100 s $\triangleq$ 0,3055 h.
d’où 3 h 1100 s $\triangleq$ 3 h + 0,3055 h $\triangleq$ 3,3055 h

2) Sens décimal → sexagésimal

En multipliant un nombre décimal d’heure par 60 on obtient un nombre de minutes (avec des minutes on obtient des secondes).

Exemple : 4,2 h

4,2 h = 4 h + 0,2 h
$0{,}2 \times 60 = 12$ donc 0,2 h $\triangleq$ 12 min.
d’où 4,2 h $\triangleq$ 4 h 12 min

Si on désire transformer un nombre d’heures en secondes, il faut le multiplier par 3600.

Exemple : 4,56 h

4,56 h = 4 h + 0,56 h
$0{,}56 \times 3600 = 2016$ donc 0,56 h $\triangleq$ 2016 s
d’où 4,56 h $\triangleq$ 4 h + 2016 s   soit 4 h 33 min 36 s

VITESSE

I) Calcul de la vitesse

Une voiture parcourt 70 km en 1 heure : sa vitesse moyenne est de 70 km/h.

Un cycliste met 1 seconde pour parcourir 10,2 m : sa vitesse est 10,2 m /s.

La vitesse correspond à la distance parcourue par unité de temps.

v : vitesse moyenne

d : distance parcourue on a : $\boxed{v_{moy} = \frac{d}{t}}$

t : durée du parcours

Elle s'exprime en km/h (kilomètre par heure) ou m/s (mètre par seconde).

II) Recherche de la distance

Un train parcourt un trajet entre deux villes à la vitesse de 252 km/h en 2h 18 min.
Quelle est la distance entre ces deux villes ?

1ère méthode

On travaille sur des durées exprimées en minutes.

2 h 18 min $\triangleq$ 138 min $(2 \times 60 + 18)$.

On construit un tableau de proportionnalité.

Durée (min)	Distance (km)
60	252
138	?

On résout la proportionnalité.

$$? = \frac{138 \times 252}{60}$$ soit 579,6 km entre les deux villes.

2ème méthode

On travaille sur des durées exprimées en heures.

2 h 18 min $\triangleq$ 2,3 heures $\left(2 + \frac{18}{60}\right.$ heures).

On construit un tableau de proportionnalité.

Durée (heure)	Distance (km)
1	252
2,3	?

On résout la proportionnalité.

$$? = \frac{2,3 \times 252}{1} \quad \text{soit } 579,6 \text{ km entre les deux villes.}$$

III) Recherche de la durée

Pour parcourir la distance de 567 km, une voiture roule à la vitesse de 108 km/h.
Quel temps mettra-t-elle ?

1ère méthode

On travaille sur des durées exprimées en minutes.

On construit un tableau de proportionnalité.

Durée (min)	Distance (km)
60	108
?	567

On résout la proportionnalité.

$$? = \frac{567 \times 60}{108} \quad \text{soit } 315 \text{ min ou encore 5h 15 min.} \quad (5 \times 60 + 15)$$

2ème méthode

On travaille sur des durées exprimées en heures.

On construit un tableau de proportionnalité.

Durée (heure)	Distance (km)
1	108
?	567

On résout la proportionnalité.

$$? = \frac{1 \times 567}{108} \quad \text{soit } 5,25 \text{ h ou encore 5 h 15 min} \quad (5,25 \times 60).$$

IV) Recherche de la vitesse

Pour parcourir la distance de 342 km, une voiture à roulé pendant 3h 36 min.
A quelle vitesse moyenne a-t-elle roulé ?

1ère méthode

On travaille sur des durées exprimées en minutes.

3h 36 min $\triangleq$ 216 min $(3 \times 60 + 16)$.

On construit un tableau de proportionnalité.

Durée (min)	Distance (km)
216	342
60	?

On résout la proportionnalité.

$$? = \frac{342 \times 60}{216} \quad \text{soit } 95 \text{ km/h}$$

2ème méthode

On travaille sur des durées exprimées en heures.

3h 36 min $\triangleq$ 3,6 heures $(3+\frac{36}{60} = 3{,}6)$.

On construit un tableau de proportionnalité.

Durée (heure)	Distance (km)
3,6	342
1	?

On résout la proportionnalité.

$$? = \frac{1 \times 342}{3{,}6} \quad \text{soit } 95 \text{ km/h.}$$

V) Transformation des m/s en km/h et inversement

Rappelons qu'il y 1000m dans 1 km et 3600 s dans une heure.

Exemple 1

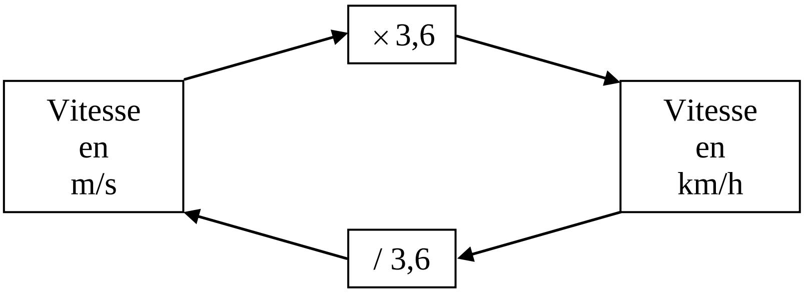
On peut dire d'une voiture qui roule à 45 km/h qu'elle parcourt 45000 m en une heure ou encore qu'elle parcourt 45000 m en 3600 s.

$$\frac{45000}{3600} = 12{,}5$$ La voiture roule à 12,5 m/s.

Exemple 2

On peut dire d'une voiture qui roule à 20 m/s qu'elle parcourt 0,020 km en une seconde ou encore qu'elle parcourt 72 000 en une heure ($0{,}020 \times 3600 = 72\,000$).
La voiture roule à la vitesse de 72 km/h.

Pour passer des m/s en km/h, on multiplie par 3600 et on divise par 1000.
Pour passer des km/h en m/s, on multiplie par 1000 et on divise par 3600.



DÉBIT

Une pompe débite 45 litres en 1 heure. Son débit est 45L/h.

Un robinet débite 2,1 cm^3 en 1 seconde. Son débit est de 2,1 cm^3/s.

Le débit correspond au volume débité par unité de temps.

D : débit

V : volume débité on a : $\boxed{D = \frac{V}{t}}$

t : durée du débit

I) Recherche du volume

Un réservoir est vidé en 1 min 15 s grâce à un robinet ayant un débit de 16 L/min.
Quelle est la contenance du réservoir ?

1ère méthode

On travaille sur des durées exprimées en minutes.

1 min 15 s $\triangleq$ 1,25 min ($\frac{15}{60} = 0{,}25$).

On construit un tableau de proportionnalité.

Durée (min)	Volume (L)
1	16
1,25	?

On résout la proportionnalité.

$$? = \frac{1{,}25 \times 16}{1}$$ soit 20 L pour la contenance du réservoir.

2ème méthode

On travaille sur des durées exprimées en secondes.

1min 15s $\triangleq$ 75 secondes (60 +15 s).

On construit un tableau de proportionnalité.

Durée (secondes)	Volume (L)
60	16
75	?

On résout la proportionnalité.

$$? = \frac{75 \times 16}{60}$$ soit 20 L pour la contenance du réservoir.

II) Recherche de la durée

Une pompe remplit une cuve de 52,56 daL à raison de 36 dm^3/min.
Quelle est la durée de remplissage de la cuve ?

1ère méthode

On travaille sur des volumes exprimés en litres et des durées en minutes.

52,56 daL $\triangleq$ 525,6 L.
36 dm^3 $\triangleq$ 36 L.

On construit un tableau de proportionnalité.

Durée (min)	Volume (L)
1	36
?	525,6

On résout la proportionnalité.

$$? = \frac{1 \times 525{,}6}{36}$$ soit 14,6 min ou encore 14 min 36 s (14 + 0,6 $\times$ 60) pour remplir la cuve.

2ème méthode

On travaille sur des volumes exprimés en litres et des durées en secondes.

52,56 daL $\triangleq$ 525,6 L.
36 dm^3 $\triangleq$ 36 L.

On construit un tableau de proportionnalité.

Durée (s)	Volume (L)
60	36
?	525,6

On résout la proportionnalité.

$$? = \frac{60 \times 525{,}6}{36}$$ soit 876 s ou encore 14 min 36 s (876 = 14 $\times$ 60+36) pour remplir la cuve.

III) Recherche du débit

Un robinet vide un bassin de 567 litres en 2 h 42 min.
Quel est son débit ?

1ère méthode

On travaille sur des volumes exprimés en litres et des durées en heures.

$2\text{ h }42\text{ min} \triangleq 2{,}7\text{ h}.\quad (2+\frac{42}{60})$

On construit un tableau de proportionnalité.

Durée (heure)	Volume (L)
2,7	567
1	?

On résout la proportionnalité.

$$? = \frac{1 \times 567}{2{,}7}$$ soit un débit de210 L/h.

2ème méthode

On travaille sur des volumes exprimés en litres et des durées en minutes.

$2\text{ h }42\text{ min} \triangleq 162\text{ min} \quad (2 \times 60 + 42)$

On construit un tableau de proportionnalité.

Durée (min)	Volume (L)
162	567
60	?

On résout la proportionnalité.

$$? = \frac{60 \times 567}{162}$$ soit un débit de210 L/h.

IV) Conversion des L/h en cm^3/s et inversement

Rappelons qu'il y 1000 cm^3 dans 1 L et 3600 s dans une heure.

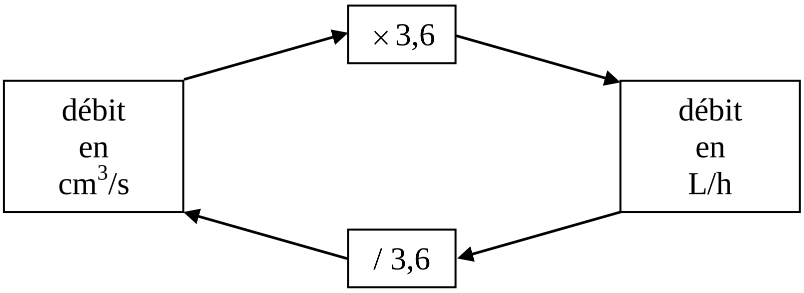
Exemple 1

Un robinet a un débit de 1800 L/h. Cela revient à dire que le robinet débite 1800 L en 3600 s ou encore 1 800 000 cm^3 en 3600 s. Soit un débit de :

$$\frac{1800000}{3600} = 500 \text{ soit } 500 \text{ cm}^3/\text{s}$$

Exemple 2

Un robinet a un débit de 215 cm^3/s. Cela revient à dire qu'il débite 774000 cm^3 en 3600 s ou encore 774 L en 1 h. Soit un débit de : 774 L/h.



MASSE VOLUMIQUE - DENSITÉ

• Un dm^3 (1 litre) d'eau a une masse de 1 kg. Sa masse volumique est 1 kg/dm^3.
Sa densité est de 1 (sans unité).

• Un morceau de fer ayant un volume de 1 dm^3 a une masse de 7,7 kg.
Sa masse volumique est 7,7 kg/dm^3. Sa densité est de 7,7.

1 cm^3 de ce même métal pèse 1000 fois moins qu'un dm^3. Sa masse est de 7,7 g.
Sa masse volumique est 7,7 g/cm^3.

1 m^3 de ce même métal pèse 1000 fois plus qu'un dm^3. Sa masse est de 7,7 tonnes.
Sa masse volumique est 7,7 t/m^3.

• La masse volumique c'est la masse par unité de volume.

• La densité d'un corps solide ou liquide est égale au rapport de la masse d'un certain volume de ce corps avec la masse du même volume d'eau :

$$\text{densité} = \frac{\text{masse d' un certain volume du corps}}{\text{masse du même volume d'eau}}$$

I) Recherche du volume

Un morceau métal de masse volumique 10,5 kg/dm^3 pèse 6836 g. Quel est le volume occupé par ce morceau de métal ?

On travaille sur des masses exprimées en kg et des volumes en dm^3.

6825 g $\triangleq$ 6,825 kg

On construit un tableau de proportionnalité.

Masse (kg)	Volume (dm^3)
10,5	1
6,825	?

On résout la proportionnalité.

$$? = \frac{6{,}825 \times 1}{10{,}5}$$ soit un volume de 0,65 dm^3 ou encore 650 cm^3.

II) Recherche de la masse

Le volume d'aluminium nécessaire pour la confection d'un objet est de 0,025 m^3
(masse volumique de l'aluminium : 2,7 kg/dm^3). Quelle est la masse d'aluminium utilisée ?

On travaille sur des masses exprimées en kg et des volumes en dm^3.

0,025 $m^3 \triangleq$ 25 dm^3

On construit un tableau de proportionnalité.

Masse (kg)	Volume (dm^3)
2,7	1
?	25

On résout la proportionnalité.

$$? = \frac{2,7 \times 25}{1}$$ soit une masse de 67,5 kg .

III) Recherche de la masse volumique

8,9 cL de platine pèsent 19046 dg.
Quelle est la masse volumique du mercure en g/cm^3 ?

On travaille sur des masses exprimées en g et des volumes en cm^3.

8,9 cL $\triangleq$ 89 cm^3
19046 dg $\triangleq$ 1904,6 g

On construit un tableau de proportionnalité.

Masse (g)	Volume (cm^3)
1904,6	89
?	1

On résout la proportionnalité.

$$? = \frac{1904,6 \times 1}{89}$$ soit une masse volumique de 21,4 g/cm^3 .

IV) Recherche de la densité

5,5 dm^3 de plomb pèsent 62,7 kg.
Quelle est la densité du plomb ?

On travaille sur des masses exprimées en kg et des volumes en dm^3.

On construit un tableau de proportionnalité.

Masse (kg)	Volume (dm^3)
62,7	5,5
?	1

On résout la proportionnalité.

$$? = \frac{62,7 \times 1}{5,5}$$ soit une densité de 11,4 .

V) Tableau de quelques densités

Métal	Masse Volumique en g/cm^3 , kg/m^3
ALUMINIUM	2,7
ARGENT	10,5
CUIVRE	8,7
ETAIN	7,3
FER	7,7
MAGNESIUM	1,74
MANGANESE	7,2
MERCURE	13,5
NICKEL	8,9
OR	19,3
PLATINE	21,4
PLOMB	11,4
TITANE	4,5

LES NOMBRES PREMIERS

<u>Définition</u> : Un nombre premier est un nombre divisible que par lui-même et par l'unité. Le chiffre 1 n'est pas un nombre premier.

Il y a une infinité de nombres premiers.
Devant un nombre important, il est difficile (voir encore impossible) de dire si ce nombre est premier.
Le procédé dit « crible d'Eratosthène » (grec qui vécut de 280 à 192 avant J-C) consiste à rayer dans la suite des nombres ceux qui sont multiples de 2, puis de 3, puis de 5, de 7, …
On notera que 2 est le seul nombre premier pair.

NOMBRES PREMIERS COMPRIS ENTRE 1 ET 100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

<u>Il plane sur les nombres premiers une sorte de mystère. Nous n'avons pas pu montrer l'existence d'une périodicité dans la suite de ces nombres. Les mathématiciens d'autrefois considéraient la recherche des nombres premiers élevés comme un jeu.</u>
Des remarques intéressantes ont été trouvées :

Tout nombre impair est la somme de trois nombres premiers.

Tout nombre premier autre que 2 ou 3 est un multiple de 6 augmenté ou diminué de 1.

Aujourd'hui les nombres premiers sont au cœur de la recherche de cryptage de messages informatiques.

FRACTIONS ÉQUIVALENTES

- Une fraction est un quotient (division) de deux nombres entiers a et b.

$$\frac{a}{b} \begin{array}{l} \leftarrow \text{numérateur} \\ \leftarrow \text{dénominateur} \end{array}$$

- $\frac{56}{35} = \frac{56 \times 2}{35 \times 2} = \frac{112}{70} = \frac{56 \div 7}{35 \div 7} = \frac{8}{5}$ car $\frac{56}{35} = 1{,}6$; $\frac{112}{70} = 1{,}6$; $\frac{8}{5} = 1{,}6$

Fractions équivalentes

- Chercher une fraction équivalente à une fraction donnée, c'est multiplier ou diviser les deux termes de cette fraction par un même nombre (non nul).

On peut donner une infinité de fractions équivalentes à une fraction donnée.

I) Recherche des fractions équivalentes à une fraction donnée irréductible

Rechercher toutes les fractions équivalentes à la fraction $\frac{5}{3}$.

On multiplie chaque terme par 2, 3, 4, …

$$\frac{5}{3} = \frac{5 \times 2}{3 \times 2} = \frac{10}{6}$$
$$\frac{5}{3} = \frac{5 \times 3}{3 \times 3} = \frac{15}{9}$$
$$\frac{5}{3} = \frac{5 \times 4}{3 \times 4} = \frac{20}{12}$$
$$\frac{5}{3} = \frac{5 \times 5}{3 \times 5} = \frac{25}{15}$$
$$\frac{5}{3} = \frac{5 \times 6}{3 \times 6} = \frac{30}{18}$$

il y en a une infinité…

etc.

II) Recherche des fractions équivalentes à une fraction donnée quelconque

On doit transformer la fraction donnée en une fraction irréductible (voir chapitre simplification de fractions), si tel n'est pas le cas, de façon à ne pas oublier certaines fractions équivalentes, puis multiplier chaque terme de la fraction irréductible par 2, 3, 4, …

DIVISIBILITÉ - MULTIPLES D'UN NOMBRE

La division de 272 par 17 a un reste nul :

$$\begin{array}{r|l} 272 & 17 \\ \cline{2-2} 0 & 16 \\ \text{reste nul} & \text{quotient exact} \end{array}$$

On dit que 272 est un multiple de 17 ou encore que 272 est divisible par 17.

- Un nombre est divisible par 2 ou est un multiple de 2 s'il se termine par : 0, 2, 4, 6 ou 8 (nombre pair).

- Un nombre est divisible par 5 ou est un multiple de 5 s'il se termine par : 0 ou 5.

- Un nombre est divisible par 10, 100, 1000 … ou est un multiple de 10, 100, 1000, … s'il se termine par : 0, 00, 000, …

- Un nombre est divisible par 3 (ou 9) ou est un multiple de 3 (ou 9) si la somme de ses chiffres est divisible par 3 (ou 9) ou multiple de 3 (ou 9).

I) Recherche des multiples d'un nombre

Quels sont les multiples de 13 ?

On multiplie successivement par 1, 2, 3, 4, 5, …

$$\begin{gathered} 13 \times 1 = 13 \\ 13 \times 2 = 26 \\ 13 \times 3 = 39 \\ 13 \times 4 = 52 \\ 13 \times 5 = 65 \end{gathered}$$

Les multiples de 13 sont : 13, 26, 39, 52, 65, … Il y a en a une infinité.

II) Recherche de la divisibilité par un nombre quelconque

546 ou 236 sont-ils multiples de 13 ?

1er nombre : 546

On effectue la division par le nombre

$$\begin{array}{r|l} 546 & 13 \\ \cline{2-2} 0 & 42 \end{array}$$

Comme le reste est nul, on conclut que 546 est divisible par 13.

2ème nombre : 236

On effectue la division par le nombre

$$\begin{array}{r|l} 236 & 13 \\ \cline{2-2} 2 & 18 \end{array}$$

Comme le reste n'est pas nul, on conclut que 236 n'est pas divisible par 13.

III) Recherche de la divisibilité d'un nombre par 3

2 378 916 est-il multiple de 3 ?

On calcule la somme de tous les chiffres qui composent ce nombre :

$$2 + 3 + 7 + 8 + 9 + 1 + 6 = 36$$

On regarde si le résultat (36) est un multiple de 3 :

$$36 = 3 \times 12$$

2 378 916 est donc un multiple de 3.

IV) Recherche de la divisibilité d'un nombre par un « produit »

2 378 916 est-il divisible par 6 ?

On remarque que $6 = 2 \times 3$

On regarde si le nombre est divisible par chacun des facteurs du produit :

2 378 916 est multiple de 3 (vu au III).
2 378 916 est multiple de 2 (nombre pair).

2 378 916 est-il divisible par le produit $2 \times 3 = 6$?

Un nombre est divisible par un produit s'il est divisible par chacun des facteurs de ce produit.

V) Recherche des multiples communs à deux nombres

Quels sont les multiples communs à 26 et à 39 ?

On recherche les multiples de chacun des nombres :

$$26 \times 1 = 26 \text{ et } 39 \times 1 = 39$$
$$26 \times 2 = 52 \text{ et } 39 \times 2 = \mathbf{78}$$
$$26 \times 3 = \mathbf{78} \text{ et } 39 \times 3 = 117$$
$$26 \times 4 = 104 \text{ et } 39 \times 4 = \mathbf{156}$$
$$26 \times 5 = 130 \text{ et } 39 \times 5 = 195$$
$$26 \times 6 = \mathbf{156} \text{ et } 39 \times 6 = \mathbf{234}$$
$$26 \times 7 = 182 \text{ et } 39 \times 7 = 273$$
$$26 \times 8 = 208 \text{ et } 39 \times 8 = 312$$
$$26 \times 9 = \mathbf{234} \text{ et } 39 \times 8 = 351$$

On repère ceux qui sont communs dans chaque liste : 78 ; 156 ; 234 ; … Ce sont les multiples communs à 36 et 39. Il y en a une infinité.
On constate que ces multiples sont des multiples de 78.
78 est appelé le PPCM : plus petit commun multiple.

Il y a une infinité de multiples communs à deux nombres ; ce sont les multiples du plus petit commun multiple.

http://maths-sciences.fr

DIVISEURS D'UN NOMBRE

182	=	13×14
↓		↓
182 est multiple de 13		13 est diviseur de 182

· Un nombre est multiple de 13 ; 13 est diviseur de ce nombre.

· Un nombre est premier s'il n'admet que 2 diviseurs : 1 et lui-même.
Les nombres premiers sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, …

I) Recherche des diviseurs d'un nombre

Quels sont les diviseurs de 52 ?

On écrit toutes les multiplications donnant le nombre comme résultat :

$$1\times 52$$
$$2\times 26$$
$$4\times 13$$
$$13\times 4$$

On s'arrête lorsqu'on retrouve un diviseur déjà écrit.

On liste tous les diviseurs : 1, 2, 4, 13, 26, 52.

Un nombre a un nombre limité de diviseurs.

II) Comment reconnaître qu'un nombre est premier ?

53 est-il un nombre premier ?

On commence par cher si ce nombre est divisible :

· par 2 ?
53 n'est pas pair, il n'est divisible par aucun nombre pair.

· par 3 ?
53 n'est pas divisible par 3. (5 + 3 = 8)

· par 5 ?
53 n'est pas divisible par 5. (Il ne termine pas par 5 ou 0)

· par 7 ?
53 n'est pas divisible par 7.

· par 11 ?
53 n'est pas divisible par 11.

On s'arrête lorsque le quotient devient inférieur au diviseur.

$$\begin{array}{l} 53 = 11 \times 4 + \ldots \\ \qquad\qquad\ \ \downarrow \\ \qquad\qquad\ \ 4 < 11 \end{array}$$

53 n'admet comme diviseur que 1 et 53. Il est premier.

On divise le nombre par 2, 3, 5, 7, 11, … (nombres premiers). Si aucune division ne donne un reste nul, on s'arrête quand le quotient devient inférieur au diviseur.

III) Décomposition en un produit de facteurs premiers ou écriture primaire d'un nombre

Donner l'écriture primaire du nombre 2250.

On écrit le nombre sous la forme d'un produit de facteurs premiers.

2250	2
1125	3
375	3
125	5
25	5
5	5
1	
quotients successifs	diviseurs premiers

$$2250 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5$$

On peut exprimer le produit à l'aide des puissances : $2250 = 2 \times 3^2 \times 5^3$

IV) Recherche des diviseurs communs à deux nombres

Quels sont les diviseurs communs à 42 et 63 ?

On recherche les diviseurs de chacun des nombres :

$$\begin{array}{ll} 42 = 1 \times 42 & \qquad 63 = 1 \times 63 \\ \ 2 \times 21 & \qquad \ 3 \times 21 \\ \ 3 \times 14 & \qquad \ 7 \times 9 \\ \ 6 \times 7 & \end{array}$$

les diviseurs de 42 sont : 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42
les diviseurs de 63 sont : 1, 3, 7, 9, 21, 63

42 et 63 n'ont que quatre diviseurs communs : 1, 3, 7, 21

Il y a un nombre limité de diviseurs communs à deux nombres. Ce sont les diviseurs du Plus Grand Commun Diviseur (PGCD).

SIMPLIFICATION DE FRACTIONS

$\dfrac{330}{462} = \dfrac{330 \div 2}{462 \div 2} = \dfrac{165}{231}$ On a simplifié la fraction $\dfrac{330}{462}$ mais on peut aller plus loin :

$\dfrac{165}{231} = \dfrac{165 \div 3}{231 \div 3} = \dfrac{55}{77}$ On a simplifié la fraction $\dfrac{55}{77}$ mais on peut encore aller plus loin :

$\dfrac{55}{77} = \dfrac{55 \div 11}{77 \div 11} = \dfrac{5}{7}$ Simplifier une fraction, c'est écrire une fraction équivalent dont les termes sont plus petits, c'est à dire diviser ses deux termes par un même nombre.

I) Simplification par divisions successives

Simplifier la fraction $\dfrac{196}{56}$.

Méthode	**Solution**
• On recherche un diviseur commun à chaque terme.	7 est un diviseur de 196 et 56.
• On divise chaque terme par ce diviseur.	$\dfrac{196 \div 7}{56 \div 7} = \dfrac{28}{8}$
• On recherche un diviseur commun à chaque terme de la fraction simplifiée.	2 est un diviseur de 28 et 8.
• On divise chaque terme par ce diviseur etc	$\dfrac{28 \div 2}{8 \div 2} = \dfrac{14}{4}$ 2 est un diviseur de 14 et 4. $\dfrac{14 \div 2}{4 \div 2} = \dfrac{7}{2}$
• On s'arrête quand les deux termes n'ont plus de diviseurs communs.	7 et 2 sont premiers entre eux. **La fraction est irréductible.**

On a divisé par 7, 2 et 2 donc par $7 \times 2 \times 2 = 28$.
Le plus grand diviseur commun à 196 et 56 est 28.

II) Simplification par décomposition en facteurs premiers

Simplifier la fraction $\dfrac{196}{56}$.

Méthode	**Solution**
• On écrit chaque terme sous forme d'un produit de facteurs premiers.	$\dfrac{196}{56} = \dfrac{2^2 \times 7^2}{2^3 \times 7} = \dfrac{2 \times 2 \times 7 \times 7}{2 \times 2 \times 2 \times 7}$
• On repère les diviseurs communs à chaque terme.	2 ; 2 et 7.
• On divise chaque terme par ces diviseurs.	
• On en déduit la fraction irréductible équivalente.	$\dfrac{7}{2}$

La fraction irréductible s'obtient en divisant ses deux termes par leur grand diviseur commun.

http://maths-sciences.fr

DIVISEURS COMMUNS A PLUSIEURS NOMBRES
MÉTHODOLOGIE DE RECHERCHE

Il y a un nombre fini de diviseurs communs à plusieurs nombres. Ce sont les diviseurs du plus grand d'entre eux.

I) Recherche des diviseurs communs à plusieurs nombres

Quels sont les diviseurs communs à 135 et 450 ?

Méthode	**Solution**
• On décompose chaque nombre en un produit de facteurs premiers.	$135 = 3^2 \times 5$ $450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$ $\downarrow \quad \downarrow$
• On repère les diviseurs premiers communs. • On leur affecte l'exposant le plus petit.	$3 \quad 5$
• Leur produit est le plus Grand Commun Diviseur des deux nombres.	PGCD de 135 et 450 = $3^2 \times 5 = 45$
• On en déduit tous les autres diviseurs communs.	$45 = 1 \times 45$ $= 3 \times 15$ $= 5 \times 9$ Les diviseurs de 45 : 1 ; 3 ; 5 ; 9 ; 45 sont les diviseurs communs à 135 et 450.

II) Découverte et utilisation de la notion de diviseur dans un problème

On veut poser des poteaux sur 3 cotés d'un terrain de sorte que l'écart entre deux poteaux consécutifs soit toujours le même et le plus grand possible. (Il y a un poteau aux extrémités des trois cotés). Quelle est la distance entre deux poteaux consécutifs, si les cotés mesurent 15 m, 21 m et 39m.

Méthode	**Solution**
• On traduit l'énoncé par un dessin.	
• L'écart cherché divise exactement les dimensions du terrain.	L'écart entre deux poteaux consécutifs est un diviseur de 15, 21, et 39.
• On cherche les diviseurs communs à ces dimensions.	$15 = 3 \times 5$ $21 = 3 \times 7$ $39 = 3 \times 13$ $\downarrow$ PGCD des 3 nombres = 3 Les diviseurs de 3 sont : 1 et 3. Ce sont les diviseurs communs à 15, 21 et 39.
• On exprime le résultat.	L'écart maximum entre deux poteaux consécutifs est de 3 mètres.

http://maths-sciences.fr

MULTIPLES COMMUNS A PLUSIEURS NOMBRES
MÉTHODOLOGIE DE RECHERCHE

Il y a une infinité de multiples communs à plusieurs nombres, ce sont les multiples du plus petit d'entre eux.

I) Recherche des multiples communs à plusieurs nombres

Quels sont les diviseurs communs à 147 et 45 ?

Méthode	**Solution**
• On décompose chaque nombre en un produit de facteurs premiers.	$147 = 3 \times 7^2$ $45 = 3^2 \times 5$ $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
• On repère les diviseurs premiers communs ou non.	$3 \quad 5 \quad 7$
• On leur affecte l'exposant le plus grand. • Leur produit est le Plus Petit Commun Multiple.	PPCM de $= 3^2 \times 5 \times 7^2 = 2205$ 147 et 45
• On en déduit tous les autres multiples communs.	$2205 \times 1 = 2205$ $2205 \times 2 = 4410$ $2205 \times 3 = 6615$ $2205 \times 4 = 8820$ $2205 \times 5 = 11025$ $2205 \times 6 = \ldots\ldots.$ **Les multiples de 2205 : 2205 ; 4410 ; 6615 ; 8820 ; … sont les multiples de 147 et 45.**

II) Découverte et utilisation de la notion de multiples dans un problème

Deux véhicules mettent respectivement 225 et 250 secondes pour boucler un circuit. S'ils sont partis au même instant, quand franchiront-ils à nouveau ensemble la ligne de départ, pour la 1ère fois, pour la 2ème fois, pour la 3ème fois ?

Méthode	**Solution**
• On résume l'énoncé.	Temps mis par le 1er véhicule pour faire un tour : 225 s. Temps mis par le 2ème véhicule pour faire un tour : 250 s.
• Le temps cherché est multiple du temps mis par chacun pour faire un tour. • On cherche les multiples communs à ces durées.	Le temps au bout duquel les deux véhicules franchiront ensemble la ligne de départ est un multiple de 225 et 250 $225 = 3^2 \times 5^2$ $250 = 2 \times 5^3$ $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$ PPCM des deux nombres = $2 \times 3^2 \times 5^3$ 2250

- On exprime le résultat.

Les multiples de 2250 sont :
$2250 \times 1 = 2250$
$2250 \times 2 = 4500$
$2250 \times 3 = 6750$
$2250 \times 4 = 9000$
$2205 \times 5 =$ …….

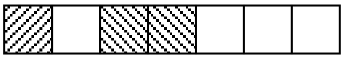
Ce sont les multiples communs à 225 et 250.
Ils franchiront ensemble la ligne de départ
La 1ère fois au bout de 2250 s $\triangleq$ 37 min 30 s
La 2ème fois au bout de 4500 s $\triangleq$ 75 min
$\triangleq$ 1h 15 min
La 3ème fois au bout de 6750 s $\triangleq$ 1h 52 min 30 s.

http://maths-sciences.fr

FRACTIONS DE MÊME DÉNOMINATEUR
ADDITION - SOUSTRACTION

$$\text{Fraction} = \frac{\text{Nombre de parts choisies}}{\text{Nombre de parts totales}}$$

Addition

Partageons une barre en cinq parts égales : 

On a hachuré 1 part sur les 7, soit $\frac{1}{7}$ de la barre.

On a hachuré 2 parts sur les 7, soit $\frac{2}{7}$ de la barre.

En tout, on a hachuré 3 parts sur les 7, soit $\frac{3}{7}$ de la barre

ce qui s'écrit : $\frac{1}{7}+\frac{2}{7}=\frac{3}{7}$

Soustraction

Nombre total de parts : 7 parts sur les 7, soit $\frac{7}{7}=1$.

Nombre de parts non hachurées : 4 sur les 7, soit $\frac{4}{7}$ de la barre.

ce qui s'écrit : $1-\frac{3}{7}=\frac{7}{7}-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$

I) Addition de fractions de même dénominateur

Effectuer $\frac{5}{13}+\frac{3}{13}$

Méthode

- On additionne les numérateurs.
- On garde le dénominateur commun.

Solution

$$\frac{5}{13}+\frac{3}{13}=\frac{5+3}{13}=\frac{8}{13}$$

II) Soustraction de fractions de même dénominateur

Effectuer $\frac{9}{11}-\frac{8}{11}$

Méthode

- On soustrait les numérateurs.
- On garde le dénominateur commun.

Solution

$$\frac{9}{11}-\frac{8}{11}=\frac{9-8}{11}=\frac{1}{11}$$

http://maths-sciences.fr

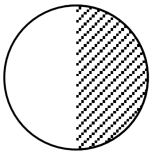
III) Addition d’un entier et d’une fraction

Effectuer $2+\dfrac{7}{50}$

Méthode	**Solution**
• On écrit l’entier sous forme de fraction.	$2=\dfrac{100}{50}$
• On additionne les numérateurs. • On garde le dénominateur commun.	$2+\dfrac{8}{50}=\dfrac{100}{50}+\dfrac{7}{50}=\dfrac{107}{50}$

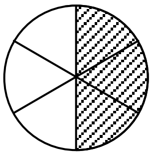
http://maths-sciences.fr

FRACTIONS : MULTIPLICATION



Partageons un disque en deux parts égales.

• On a hachuré 1 part sur les 2, soit la moitié du cercle ou $\frac{1}{2}$ du cercle.



Partageons chaque demi-disque en trois parts égales.

• Une part sur les 3 représente $\frac{1}{3}$ du demi cercle ou $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$ du cercle.

Le cercle a finalement été partagé en 6 parts égales.

• On a hachuré 1 part sur les 6, soit $\frac{1}{6}$ du cercle.

Multiplier des fractions, c'est multiplier numérateurs entre eux et dénominateurs entre eux.

I) Multiplication de deux fractions

Effectuer $\frac{2}{5}\times\frac{7}{13}$

Méthode

• On multiplie les numérateurs entre eux.
• On multiplie les dénominateurs entre eux.

Solution

$$\frac{2}{5}\times\frac{7}{13}=\frac{2\times 7}{5\times 13}=\frac{14}{65}$$

II) Multiplication d'un entier par une fraction

Effectuer $\frac{5}{3}\times 11$

Un nombre entier est une fraction de dénominateur 1.

Méthode

• On remplace l'entier par une fraction.
• On multiplie les numérateurs entre eux.
• On multiplie les dénominateurs entre eux.

Solution

$$11=\frac{11}{1}$$

$$\frac{5}{3}\times 11=\frac{5}{3}\times\frac{11}{1}=\frac{5\times 11}{3\times 1}=\frac{55}{3}$$

http://maths-sciences.fr

DIVISION PAR UNE FRACTION
FRACTION DE … POURCENTAGE DE …

Prendre une fraction de … revient à faire une multiplication suivie d'une division ou une division suivie d'une multiplication.

- Prendre les $\frac{3}{4}$ de 20

$\times\frac{3}{4}$

	20
$\times 3$	60
$\div 4$	15

ou

$\times\frac{3}{4}$

	20
$\div 4$	5
$\times 3$	15

C'est écrire $\frac{3}{4}\times 20 = 15$

- Inversement, connaissant les $\frac{3}{4}$ d'un nombre, comment trouver ce nombre ?

en divisant par $\frac{3}{4}$ ou en multiplier par $\frac{3}{4}$

$\times\frac{3}{4}$ $\div\frac{3}{4}$

?
15

	?	
$\times 3$	60	$\div 3$
$\div 4$	15	$\times 4$

$\div\frac{4}{3}$

Opération inverse de la multiplication

Ce qui s'écrit $15\div\frac{3}{4} = 15\times\frac{4}{3} = 20$

Diviser par une fraction, c'est multiplier par son inverse.

I) Recherche d'une fraction d'une grandeur

Un bassin de 720 litres est rempli d'eau aux $\frac{5}{8}$. Quelle est la quantité d'eau dans ce bassin ?

Méthode	**Solution**
• On résume l'énoncé.	Capacité du bassin = 720 litres.
• On effectue la multiplication par 5 suivie de la division par 8 ou inversement.	Volume d'eau = $\frac{5}{8}\times 720$
• On exprime le résultat en litres.	= 450 litres

http://maths-sciences.fr

II) Recherche d'un pourcentage d'une grandeur

La distance Paris-Roubaix est de 317,5 km. Un représentant a parcouru 46 % du trajet en arrivant à Valenciennes. Quelle est la distance Paris-Valenciennes ?

Prendre un pourcentage de … revient à faire une multiplication suivie d'une division par 100 ou inversement.

Méthode	**Solution**
• On résume l'énoncé.	Distance Paris-Roubaix = 317,5 km
• On effectue la multiplication par 46 suivie de la division par 100.	Distance Paris-Valenciennes $= \frac{46}{100} \times 317{,}5$
• On exprime le résultat en km.	= 146 km

III) Division par une fraction

Effectuer $9 \div \frac{4}{7}$

Méthode	**Solution**
• On remplace la division par une multiplication (par l'inverse).	$\dfrac{9}{\frac{4}{7}} = 9 \times \dfrac{7}{4}$
• On effectue la multiplication des fractions.	$\dfrac{9}{1} \times \dfrac{7}{4} = \dfrac{9 \times 7}{1 \times 4}$
• On écrit la fraction résultat.	$\dfrac{63}{4}$

Effectuer $\frac{17}{3} \div \frac{103}{100}$

Méthode	**Solution**
• On effectue la division par une multiplication (par l'inverse).	$\dfrac{\frac{17}{3}}{\frac{103}{100}} = \dfrac{17}{3} \times \dfrac{100}{103}$
• On effectue la multiplication des fractions.	$\dfrac{17 \times 100}{3 \times 103}$
• On écrit la fraction résultat.	$\dfrac{1700}{309}$

IV) Recherche d'une grandeur, une fraction de cette grandeur étant connue

Un client achète un magnétoscope. Il paie 72 € à la commande, ce qui représente les $\frac{6}{25}$ du prix de l'appareil. Quel est le prix du magnétoscope ?

Méthode	**Solution**
• On résume l'énoncé sous forme d'une égalité.	$72\ € = \frac{6}{25} \times \text{prix}$
• On gère la formule.	$\text{prix du magnétoscope} = 72 \div \frac{6}{25}$
• On effectue la multiplication par l'inverse de la fraction.	$= 72 \times \frac{25}{6}$
• On exprime le résultat.	$= 300\ €$

V) Recherche d'une grandeur, un pourcentage de cette grandeur étant connu

M. Duroc achète un grille-pain. Il le paie 80 % du prix affiché, soit 30 €. Quel est le prix affiché du grille-pain ?

Méthode	**Solution**
• On résume l'énoncé sous forme d'une égalité.	$30\ € = \frac{80}{100} \times \text{prix affiché}$
• On gère la formule.	$\text{prix affiché} = 30 \div \frac{80}{100}$
• On effectue la multiplication par l'inverse de la fraction.	$= 30 \times \frac{100}{80}$
• On exprime le résultat.	$= 37{,}5\ €$

http://maths-sciences.fr

FRACTIONS QUELCONQUES : ADDITION - SOUSTRACTION - COMPARAISON

I) Recherche du dénominateur commun de deux fractions et réduction au même dénominateur.

Réduire les fractions suivantes au même dénominateur :

1) $\frac{16}{15}$ et $\frac{7}{12}$

Méthode	**Solution**
• On cherche un multiple commun à chacun des dénominateurs.	$15 = 3 \times 5$ $12 = 2^2 \times 3$ $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$ PPCM (15, 12) = $2^2 \times 3 \times 5 = 60$ Les multiples de 15 et 12 sont 60, 120, 180, …
• On choisit de préférence comme dénominateur commun le plus petit.	Le dénominateur commun est donc 60.
• On écrit les fractions équivalentes aux fractions données, ayant le dénominateur commun choisi.	$\frac{16}{15} = \frac{16 \times 4}{15 \times 4} = \frac{64}{60}$ $\qquad \frac{7}{12} = \frac{7 \times 5}{12 \times 5} = \frac{35}{60}$

2) $\frac{16}{15}$ et $\frac{7}{90}$

Méthode	**Solution**
• On cherche un multiple commun à chacun des dénominateurs.	$15 = 3 \times 5$ $90 = 2^2 \times 3 \times 5$ $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$ PPCM (15, 12) = $2 \times 3^2 \times 5 = 90$ Les multiples de 15 et 90 sont 90, 180, 270, …
• On choisit de préférence comme dénominateur commun le plus petit.	Le dénominateur commun est donc 90.
• On écrit les fractions équivalentes aux fractions données, ayant le dénominateur commun choisi.	$\frac{16}{15} = \frac{16 \times 6}{15 \times 6} = \frac{96}{90}$ $\qquad$ et $\qquad \frac{7}{90}$

Remarque : L'un des dénominateurs est multiple de l'autre : une des fractions reste ainsi inchangée.

3) $\dfrac{16}{15}$ et $\dfrac{3}{2}$

Méthode **Solution**

- On cherche un multiple commun à chacun des dénominateurs.

$$\begin{aligned} 15 &= \phantom{2\times{}} 3 \times 5 \\ 2 &= 2 \\ & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \end{aligned}$$

PPCM (15, 2) = $2 \times 3 \times 5 = 30$

Les multiples de 15 et 2 sont 30, 60, 90, …

Le dénominateur commun est donc 30.

- On choisit de préférence comme dénominateur commun le plus petit.
- On écrit les fractions équivalentes aux fractions données, ayant le dénominateur commun choisi.

$$\frac{16}{15} = \frac{16\times 2}{15\times 2} = \frac{32}{30} \quad \text{et} \quad \frac{7}{90} = \frac{3\times 15}{2\times 15} = \frac{45}{30}$$

Remarque : Les deux dénominateurs sont des nombres premiers entre eux : il n'y a pas de multiple commun inférieur à leur produit.

II) Addition de plusieurs fractions

Calculer $\dfrac{1}{9} + \dfrac{2}{15} + \dfrac{7}{5}$

Il est préférable, car souvent plus simple, de travailler sur des fractions irréductibles.

Méthode **Solution**

- On vérifie si les fractions sont irréductibles.

Oui

- On réduit les fractions au même dénominateur.

$$\begin{aligned} 9 &= 3^2 \\ 15 &= 3 \times 5 \\ 5 &= \phantom{3\times{}} 5 \\ & \downarrow \quad \downarrow \end{aligned}$$

PPCM (9, 15, 5) = $3^2 \times 5 = 45$

Le dénominateur commun est donc 45.

$$\frac{1}{9} = \frac{1\times 5}{9\times 5} = \frac{5}{45}$$

$$\frac{2}{15} = \frac{2\times 3}{15\times 3} = \frac{6}{45}$$

$$\frac{7}{5} = \frac{7\times 9}{5\times 9} = \frac{63}{45}$$

- On additionne les fractions de même dénominateur.

$$\frac{5}{45} + \frac{6}{45} + \frac{63}{45} = \frac{5+6+63}{45} = \frac{74}{45}$$

III) Soustraction de deux fractions

Calculer $\frac{12}{27} - \frac{2}{24}$

Méthode	**Solution**
• On rend les fractions irréductibles.	$\frac{12 \div 3}{27 \div 3} = \frac{4}{9}$ $\frac{2 \div 2}{24 \div 2} = \frac{1}{12}$
• On réduit les fractions simplifiées au même dénominateur.	$9 = 3^2$ $12 = 2^2 \times 3$ ↓ ↓ PPCM (9, 12) = $2^2 \times 3^2 = 36$ Le dénominateur commun est donc 36. $\frac{4}{9} = \frac{4\times4}{9\times4} = \frac{16}{36}$ $\frac{1}{12} = \frac{1\times3}{12\times3} = \frac{3}{36}$
• On soustrait les fractions de même dénominateur.	$\frac{16}{36} - \frac{3}{36} = \frac{16-3}{36} = \frac{13}{36}$

IV) Comparaison de fractions

Comparer les fractions suivantes : $\frac{17}{15}$, $\frac{12}{10}$ et $\frac{8}{3}$

Méthode	**Solution**
• On rend les fractions irréductibles si nécessaire.	$\frac{12 \div 2}{10 \div 2} = \frac{6}{5}$ $\frac{17}{15}$ et $\frac{8}{3}$ sont irréductibles.
• On réduit les fractions irréductibles au même dénominateur.	$15 = 3 \times 5$ $5 = 5$ $3 = 3$ ↓ ↓ PPCM (15, 5, 3) = $3 \times 5 = 15$ Le dénominateur commun est donc 15. $\frac{6\times3}{5\times3} = \frac{18}{15}$; $\frac{8\times5}{3\times5} = \frac{40}{15}$ et $\frac{17}{15}$
• On classe les numérateurs.	$17 < 18 < 40$
• On déduit le classement des fractions	$\frac{17}{15} < \frac{18}{15} < \frac{40}{15}$ ou $\frac{17}{15} < \frac{12}{10} < \frac{8}{3}$

Remarque : Si les dénominateurs sont identiques, plus le numérateur est grand, plus la fraction est grande.

Comparer les fractions suivantes : $\frac{10}{24}$, $\frac{15}{24}$ et $\frac{25}{20}$

Méthode	**Solution**
• On rend les fractions irréductibles si nécessaire.	$\frac{10 \div 2}{14 \div 2} = \frac{5}{7}$ $\frac{15 \div 3}{24 \div 3} = \frac{5}{8}$ $\frac{25 \div 5}{20 \div 5} = \frac{5}{4}$

Remarque : Si les fractions ont même numérateurs, plus le dénominateur est grand, plus la fraction est petite.

• On classe les dénominateurs.	$8 > 7 > 4$
• On en déduit le classement des fractions.	$\frac{5}{8} < \frac{5}{7} < \frac{5}{4}$ ou $\frac{15}{24} < \frac{10}{24} < \frac{25}{20}$

RAPPORT – FRACTIONS DÉCIMALE - POURCENTAGE

Comparer deux grandeurs 4,2 m et 6 m c'est calculer leur rapport :

$$\frac{4{,}2}{6}$$

↑

quotient de deux nombres quelconques

$$\frac{4,2}{6} = 4,2 \div 6 = 0,7 = \frac{7}{10} = \frac{70}{100} = \frac{700}{1000} = \frac{7000}{10000} = \ldots$$

Nombre décimal

Fractions décimales
ou fractions
de dénominateur
10, 100, 1000, …

Pourcentage
ou rapport de dénominateur 100

I) Simplification d'un rapport

Simplifier $\frac{27}{13{,}8}$.

Tout rapport peut s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible.

Méthode	**solution**
• On transforme le rapport en une fraction.	$\frac{27}{13{,}8} = \frac{27 \times 10}{13{,}8 \times 10} = \frac{270}{138}$
• On simplifie la fraction jusqu'à l'obtention d'une fraction irréductible.	$\frac{27}{138} = \frac{270 \div 2}{138 \div 2} = \frac{135 \div 3}{69 \div 3} = \frac{45}{23}$

II) Ecriture d'un nombre décimal sous forme d'une fraction décimale

Ecrire 3,5 sous la forme d'une fraction décimale.

Tout nombre peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale.

Méthode	**solution**
• On écrit le nombre décimal sous forme d'un rapport de dénominateur 1.	$3{,}5 = \dfrac{3{,}5}{1}$
• On transforme le rapport en une fraction décimale en multipliant ses deux termes par 10, 100, 1000 …	$\dfrac{3{,}5}{1} = \dfrac{3{,}5 \times 10}{1 \times 10} = \dfrac{35}{10}$ $= \dfrac{3{,}5 \times 100}{1 \times 100} = \dfrac{350}{100}$ $= \ldots$

III) Ecriture d'un rapport sous la forme d'une fraction décimale

Ecrire $\dfrac{45{,}28}{3{,}2}$ et $\dfrac{3{,}2}{45{,}28}$ sous la forme d'une fraction décimale.

1^er^ rapport

Méthode	**solution**
• On écrit le rapport sous la forme d'un nombre décimal, en divisant son numérateur par son dénominateur.	$\dfrac{45{,}28}{3{,}2} = 45{,}28 \div 3{,}2 = 14{,}15$
• On transforme le nombre décimal en une fraction décimale.	$14{,}15 = \dfrac{14{,}15}{1} = \dfrac{14{,}15 \times 100}{1 \times 100} = \dfrac{1415}{100}$ $= \dfrac{14{,}15 \times 1000}{1 \times 1000} = \dfrac{14150}{1000}$

Remarque

$\dfrac{14{,}15}{1} = \dfrac{14{,}15 \times 10}{1 \times 10} = \dfrac{141{,}5}{10}$ est un rapport de dénominateur 10 et non une fraction.

2^nd^ rapport

Méthode	**solution**
• On écrit le rapport sous la forme d'une valeur approchée d'un nombre décimal.	$\dfrac{3{,}2}{45{,}28} \simeq 0{,}07067$ Attention Quotient non exact, ce n'est pas un nombre décimal.
• On transforme le résultat en une fraction décimale de dénominateur 100 ou 1000 ou 10000 ou ...	$0{,}07067... \simeq \dfrac{7}{100}$ $\simeq \dfrac{71}{1000}$ $\simeq \dfrac{707}{10000}$ $\ldots$

Remarque : Les numérateurs de ces fractions ont été arrondis à l'entier le plus proche.

http://maths-sciences.fr

IV) Ecriture d'un rapport sous forme d'un pourcentage

Ecrire $\dfrac{5}{6,25}$ et $\dfrac{7}{3,7}$ sous forme d'un pourcentage.

1

Méthode	**solution**
• On écrit le rapport sous la forme d'un nombre décimal.	$\dfrac{5}{6,25} = 5 \div 6,25 = 0,8$
• On transforme le nombre décimal en un rapport de dénominateur 100.	$0,8 = \dfrac{0,8}{1} = \dfrac{0,8 \times 100}{1 \times 100} = \dfrac{80}{100}$

2nd rapport

Méthode	**solution**
• On écrit le rapport sous la forme d'une valeur approchée d'un nombre décimal.	$\dfrac{7}{3,7} = 7 \div 3,7 \simeq 1,891891...$
• On transforme le résultat en un rapport de dénominateur 100 dont le numérateur est arrondi	$1,891891... \simeq \dfrac{189,1891...}{100}$
à l'unité près	$1,891891... \simeq \dfrac{189}{100}$
au dixième près	$1,891891... \simeq \dfrac{189,2}{100}$
au centième près	$1,891891... \simeq \dfrac{189,19}{100}$

Attention
Il convient d'arrondir le numérateur du rapport : à l'unité la plus proche
au dixième le plus proche
au centième le plus proche

Remarque
On dit que les pourcentages sont arrondis: à l'unité la plus proche
au dixième le plus proche
au centième le plus proche

V) Comparaison de deux grandeurs et expression de l'une en pourcentage de l'autre

Comparer les capacités de 2 fûts, l'un contient 3,9 hL, l'autre 300 L ; exprimer l'une en pourcentage de l'autre.

Méthode	**solution**
• On résume le texte. • On choisit de travailler en hL.	$V_1 = 3{,}9$ hL $V_2 = 300$ L $= 3$hL
1ère solution On compare V_1 à V_2. • On écrit le rapport des deux grandeurs.	$\frac{V_1}{V_2} = \frac{3{,}9}{3} = 1{,}3$
• On le transforme en un rapport de dénominateur 100.	$= \frac{130}{100}$
• On écrit la première grandeur en fonction de la 2nd.	$V_1 = \frac{130}{100} \times V_2$
• On exprime le résultat en pourcentage.	V_1 est les 130 % de V_2.
2ème solution On compare V_2 à V_1. • On écrit le rapport des deux grandeurs.	$\frac{V_2}{V_1} = \frac{3}{3{,}9} \simeq 0{,}7692...$
• On le transforme en un rapport de dénominateur 100 dont le numérateur est arrondi à l'unité près	$0{,}76923... \simeq \frac{77}{100}$
au 1/10^e près	$0{,}76923... \simeq \frac{76{,}9}{100}$
au 1/100^e près	$0{,}76923... \simeq \frac{76{,}92}{100}$

Remarque

On dit que les pourcentages sont donnés : à l'unité près
au dixième près
au centième près

• On exprime la deuxième grandeur en fonction de la première.	$V_2 \simeq \frac{77}{100} \times V_1$ ou $\simeq \frac{76{,}9}{100} \times V_1$ ou $\simeq \frac{76{,}92}{100} \times V_1$
• On exprime le résultat en pourcentage.	V_2 est les 77 % de V_1. ou 76,9 % de V_1. ou 76,92 % de V_1.

INTÉRÊT SIMPLE

Placer un capital à 5 % signifie que 100 € rapportent 5 € au bout d'un an.
Un capital C placé à un taux t rapporte un intérêt I.

1) Calcul de l'intérêt

$$\boxed{I = C \times t \times n}$$

C = capital en euros
t = taux exprimé en nombre décimal
n : nombre de période de placement

Selon l'unité utilisée pour caractériser n (nombre de périodes) cette formule générale I = Ctn devient :

Périodes	Formules
n en années	$I = Ctn$
n en trimestres	$I = \dfrac{Ctn}{4}$
n en mois	$I = \dfrac{Ctn}{12}$
n en quinzaines	$I = \dfrac{Ctn}{24}$
n en jours	$I = \dfrac{Ctn}{360}$

I : intérêts en €
C : capital en €
t : taux d'intérêt annuel

La représentation graphique de l'intérêt en fonction de la durée de placement est une fonction linéaire.
Autres formules :

$$C = \frac{I}{t \times n} \;; \qquad t = \frac{I}{C \times n} \;; \qquad n = \frac{I}{C \times t} \;;$$

2) Valeur acquise

On appelle valeur acquise par un capital, la somme du capital et des intérêts produits.

A : valeur acquise $\qquad A = C + I$

C : capital en € $\qquad A = C + C \times t \times n$

I : intérêts en euros.

3) Taux moyen de placement

Le taux moyen T de plusieurs placements est le taux unique auquel il faudrait effectuer ces placements dans les mêmes conditions de durée pour obtenir le même intérêt total.

http://maths-sciences.fr

I) Recherche de l'intérêt et de la valeur acquise au bout d'un an

Un capital de 3000 € est placé à 3,8 %. Quel est l'intérêt rapporté par ce capital au bout d'un an ? Quel est le montant de sa valeur acquise ?

Méthode	**solution**
• On résume le texte	$C = 3000$ € $t = \dfrac{3,8}{100} = 0,038$
• On calcule l'intérêt annuel.	$I_{\text{annuel}} = C \times t$ $= 3000 \times \dfrac{3,8}{100}$ $= 114$ €.
• On déduit la valeur acquise A.	$A = C + I$ $= 3000 + 114$ $= 3114$ €

II) Recherche de l'intérêt au bout de n mois

Un capital de 5000 € est placé pendant 7 mois à 4,5 %. Quel est le montant de l'intérêt produit ?

Méthode	**solution**
• On résume le texte	$C = 3000$ € $t = \dfrac{4,5}{100} = 0,045$ $n = 7$ mois
• On déduit l'intérêt pour n mois.	$I_{\text{annuel}} = \dfrac{C \times t \times n}{12}$ $= 5000 \times \dfrac{4,5}{100} \times \dfrac{7}{12}$ $= 131,25$ €.

III) Recherche du capital placé

Un capital placé à 3 % pendant 10 mois a rapporté 100 €. Quel est le montant du capital ?

Méthode	**solution**
• On résume l'énoncé	$C = ?$ $t = 0,03$ $n = 10$ $I = 100$
1ère solution	
• On calcule l'intérêt annuel	

Durée (mois)	Intérêt (euros)
10	100
12	?

• On utilise la formule de l'intérêt annuel.

$$I_{\text{annuel}} = \frac{100 \times 12}{10} = 120 \text{ €}.$$

• On remplace les lettres par leur valeur numérique.

$$120 = C \times \frac{3}{100}$$

• On gère la formule.

$$C = 120 \times \frac{100}{3}$$

• On exprime le résultat.

Capital C = 4000 €.

2ème solution

• On utilise la formule de l'intérêt.

$$I = C \times t \times \frac{n}{12}$$

• On remplace les lettres par leur valeur numérique.

$$100 = C \times 0{,}03 \times \frac{10}{12}$$

$$= C \times 0{,}025$$

• On gère la formule.

$$C = 100 \div 0{,}025$$

• On exprime le résultat.

Capital C = 4000 €.

IV) Recherche du taux

Un capital de 9600 € placé pendant 85 jours devient capital et intérêts réunis 9668 € . Quel est le taux de ce placement ?

Méthode — **solution**

• On résume l'énoncé

C = 9600 €.
t = ?
n = 85 jours
A = 9668

1ère solution

• On calcule l'intérêt au bout de 85 jours

I = A - C
= 9668 – 9600 = 68 €.

Durée (jours)	Intérêt (euros)
85	68
360	?

$$I_{\text{annuel}} = \frac{68 \times 360}{85} = 288 \text{ €}.$$

• On utilise la formule de l'intérêt annuel.

$$I = C \times t$$

• On remplace les lettres par leur valeur

$$288 = 9600 \times t$$

numérique.

• On gère la formule.

$$t = \frac{288}{9600}$$

• On exprime le résultat.

soit t = 3%.

2^ème^ solution

• On utilise la formule de l'intérêt.

$$I = C \times t \times \frac{n}{360}$$

• On remplace les lettres par leur valeur numérique.

$$68 = 9600 \times t \times \frac{85}{360}$$

• On gère la formule.

$$t = \frac{68 \times 360}{9600 \times 85}$$

t = 0,03

• On exprime le résultat.

taux = 3 %.

V) Recherche de la durée

800 € placés à 3,5 % ont rapporté 35 €. Quelle est la durée de placement ?

Méthode / **solution**

• On résume l'énoncé

C = 800 €.
t = 0,035
n = ?
I = 35 €

1^ère^ solution

• On calcule l'intérêt annuel.

$$I_{\text{annuel}} = 800 \times 0{,}035 = 28 \text{ €}.$$

• On en déduit la durée du placement.

Durée (mois)	Intérêt (euros)
12	28
?	35

$$\text{Durée du placement} = \frac{35 \times 12}{28} = 15 \text{ mois.}$$

2^ème^ solution

• On utilise la formule de l'intérêt.

$$I = C \times t \times \frac{n}{12}$$

• On remplace les lettres par leur valeur numérique.

$$35 = \frac{800 \times 0{,}035}{12} \times n$$

• On gère la formule.

$$n = \frac{35 \times 12}{800 \times 0{,}035}$$

• On exprime le résultat.	n = 15 mois.

VI) Recherche du capital, sa valeur acquise étant connue

Un capital C est placé au taux de 6 %. La valeur acquise au bout de 3 ans est de 663,16 €.
Quel est ce capital ?

Méthode	**solution**
• On résume l'énoncé	C = ? t = 0,06 n = 3 ans A = 663,16 €
• On utilise la formule.	$A = C + I$ $A = C + C \times t \times n$
• On remplace les lettres par leur valeur numérique.	$663{,}16 = C + C \times 0{,}06 \times 3$ $= C + C \times 0{,}18$ $= C \times 1{,}18$
• On gère la formule.	$C = \dfrac{663{,}16}{1{,}18}$
• On exprime le résultat.	Capital C = 562 €.

POURCENTAGES INDIRECTS
INDICES - CALCUL DES PRIX

Pourcentages directs	**Pourcentages indirects**
Rapport de deux grandeurs dont l'une vaut 100.	Une 3ème grandeur intervient

• Un volume est majoré de 11,5 %

Pourcentages directs

$$\frac{\text{majoration}}{\text{volume initial}} = \frac{11,5}{100}$$

$$\text{majoration} = \frac{11,5}{100} \times \text{Vol. initial}$$

Pourcentages indirects

Volume final

= volume initial + majoration

$$= \frac{100}{100}\text{ vol. initial} + \frac{11,5}{100}\text{ vol. initial}$$

$$\text{Vol final} = \frac{111,5}{100} \times \text{Vol. initial}$$

$$= 1,115 \times \text{Vol. initial}$$

• Une vitesse diminue de 15 %

Pourcentages directs

$$\frac{\text{diminution}}{\text{volume initial}} = \frac{15}{100}$$

$$\text{diminution} = \frac{15}{100} \times \text{Vit. initiale}$$

Pourcentages indirects

Vitesse finale

= vitesse initiale - diminution

$$= \frac{100}{100}\text{ vit. initiale} - \frac{15}{100} \times \text{vit. initiale}$$

$$\text{Vit finale} = \frac{85}{100} \times \text{Vit. initiale}$$

$$= 0,85 \times \text{Vit. initiale}$$

Calcul d'indice

• Une production augmente entre 2000 et 2001 de 18 %

Pourcentages directs

Hausse en 2001

$$= \frac{18}{100} \times \text{Prod. 2000}$$

Pourcentages indirects

$$\text{Prod. 2001} = \frac{118}{100} \times \text{Prod. 2000}$$

Indice 2001 (base 100 : 2000) = 118

$$\text{Soit Indice}_{2001/2000} = \frac{\text{Prod 2001}}{\text{Prod 2000}} \times 100$$

• Un prix diminue entre 2000 et 2001 de 9 %

Baisse en 2001

$= \frac{9}{100} \times$ prix 2000

Prix 2001 = $\frac{91}{100} \times$ Prix 2000

Indice 2001 (base 100 : 2000) = 91

Soit Indice $_{2001/2000} = \frac{\text{Prix 2001}}{\text{Prix 2000}} \times 100$

Remarque

Un indice > 100 traduit une hausse

Un indice < 100 traduit une baisse

Application au calcul des prix

$$\text{Achat}\begin{cases}\text{Prix Achat brut - réduction = Prix achat net}\\ \text{Prix Achat net + Frais Achat = Coût d'Achat}\\ \text{Coût d'Achat + Frais Vente = Prix de revient}\end{cases}$$

$$\text{Vente}\begin{cases}\text{Prix Revient + Bénéfice = Prix Vente HT}\\ \text{Prix Achat HT + TVA = Prix Vente TTC}\end{cases}$$

I) Recherche d'une grandeur après augmentation de x %.

Un particulier achète un logement pour la somme de 120 000 €. A ce prix d'achat, il faut ajouter des frais d'acquisition de 12 %. A combien lui revient son achat ?

• On résume le texte

Prix d'achat = PA = 120 000 €

Frais = $\frac{12}{100} \times$PA

• la 3ème grandeur qui intervient est : →

Le prix de revient PR

• On l'exprime en % de la grandeur initiale.

PR = PA + Frais

• On remplace les données par leur valeur numérique.

$PR = \frac{100}{100} \times PA + \frac{12}{100} \times PA$

$= \frac{112}{100} \times PA$

$= \frac{112}{100} \times 120\ 000$

$= 1{,}12 \times 120\ 000$

• On exprime le résultat.

PR = 134 400 €

II) Recherche d'une grandeur après diminution de x %.

Un particulier achète un mixer affiché 70 € sur lequel une réduction de 7,5 % est consentie. Quel prix paie-t-il ce mixer ?

• On résume le texte	Prix brut (PB) = 70 € Réduction = $\frac{7,5}{100} \times$ Prix brut
• la 3ème grandeur qui intervient est : →	Prix net (PN) = PB - Réduction
• On l'exprime en % de la grandeur initiale.	$= \frac{100}{100} \times PB - \frac{7,5}{100} \times PB$ $= \frac{92,5}{100} \times PB$
• On remplace les données par leur valeur numérique.	$= \frac{92,5}{100} \times 70$ $= 0,925 \times 70$
• On exprime le résultat.	Prix net = 64,75 €

III) Recherche de pourcentage de variation d'une grandeur

La production d'un atelier a varié de la façon suivante :
En 1997 : 35 500 pièces fabriquées
En 1999 : 42 600 pièces fabriquées
En 2001 : 37 275 pièces fabriquées
Quelle est la variation en pourcentage du nombre de pièces fabriquées entre 1997 et 1999 d'une part et entre 1999 et 2001 d'autre part ?

Entre 1997 et 1999.

Méthode	**solution**
• On résume le texte	Production 1997 = P_{97}= 35500 pièces. Production 1999 = P_{99}= 42600 pièces.
• On compare les deux grandeurs.	$\frac{P_{99}}{P_{97}} = \frac{42\,600}{35\,500} = 1,2 = \frac{120}{100}$
• On l'exprime l'une en % de l'autre.	$P_{99} = \frac{120}{100} \times P_{97}$
• la 3ème grandeur qui intervient est : →	L'augmentation = variation positive puisque 120 % > 100 %
• On l'exprime en % de la grandeur initiale.	Augmentation $= \frac{120}{100} \times P_{97} - \frac{100}{100} \times P_{97}$ $= \frac{20}{100} \times P_{97}$
• On exprime le résultat.	La variation de 1997 à 1999 est de + 20 % de la production 1997

Autre solution

Méthode	**solution**
• On résume le texte	Production 1997 = P_{97}= 35500 pièces. Production 1999 = P_{99}= 42600 pièces.
• On calcule la variation en nombre.	Variation = 42 600 – 35 500 = + 7100 = augmentation car $P_{99} > P_{97}$
• On compare la variation à la grandeur initiale.	$\frac{\text{augmentation}}{P_{97}} = \frac{7\,100}{35\,500} = 0{,}2 = \frac{20}{100}$
• On l'exprime en % de la grandeur initiale.	$\text{augmentation} = \frac{20}{100} \times P_{97}$
• On exprime le résultat.	La variation de 1997 à 1999 est de + 20 % de la production 1997

La production a augmenté de 20 % entre 1997 et 1999.

Entre 1999 et 2001.

Méthode	**solution**
• On résume le texte	Production 1999 = P_{99}= 42600 pièces. Production 2001 = P_{01}= 37275pièces.
• On compare les deux grandeurs.	$\frac{P_{01}}{P_{99}} = \frac{37\,275}{42\,600} = 0{,}875 = \frac{87{,}5}{100}$
• On l'exprime l'une en % de l'autre.	$P_{01} = \frac{87{,}5}{100} \times P_{99}$
• la 3ème grandeur qui intervient est : →	La diminution = variation négative puisque 87,5 % < 100 %
• On l'exprime en % de la grandeur initiale.	diminution $= \frac{100}{100} \times P_{99} - \frac{87{,}5}{100} \times P_{99}$ $= \frac{12{,}5}{100} \times P_{99}$
• On exprime le résultat.	La variation de 1999 à 2001 est de – 12,5 % de la production 2001

Autre solution

Méthode	**solution**
• On résume le texte	Production 1999 = P_{99}= 42600 pièces. Production 2001 = P_{01}= 37275 pièces.
• On calcule la variation en nombre.	Variation = 37275 – 42600 = - 5325 = diminution car $P_{01} < P_{99}$

• On compare la variation à la grandeur initiale.	$\dfrac{\text{diminution}}{P_{99}} = \dfrac{5\,325}{42\,600} = 0{,}125 = \dfrac{12{,}5}{100}$
• On l'exprime en % de la grandeur initiale.	diminution $= \dfrac{12{,}5}{100} \times P_{99}$
• On exprime le résultat.	La variation de 1999 à 2001 est de – 12,5 % de la production 1999

La production a diminué de 12,5 % entre 1999 et 2001.

IV) Recherche de pourcentage de variation d'une grandeur

Après augmentation de 15 %, un prix atteint 138 €. Quel était le prix initial ?

Méthode	**solution**
• On résume le texte.	Prix initial = P_1. augmentation = $\dfrac{15}{100} \times P_1$
• la 3ème grandeur est connue.	Prix final = 138 €
• On l'exprime en % de la grandeur initiale.	Prix final = P_1 + augmentation $= \dfrac{100}{100} \times P_1 + \dfrac{15}{100} \times P_1 = \dfrac{115}{100} \times P_1$
• On remplace les données par leur valeur numérique.	$138 = 1{,}15\ P_1$
• On gère la formule.	$P_1 = \dfrac{138}{1{,}15}$
• On exprime le résultat.	Prix initial = 120 €.

IV) Recherche d'une grandeur, sa valeur après diminution de x % étant connue

Après une baisse de 7 %, une production atteint 18 600 tonnes. Quelle était la production initiale ?

Méthode	**solution**
• On résume le texte	Production initiale = P_1. Diminution = $\dfrac{7}{100} \times P_1$
• la 3ème grandeur est connue.	Production finale = 18600 t
• On l'exprime en % de la grandeur initiale.	Prod finale = P_1 – diminution $= \dfrac{100}{100} \times P_1 - \dfrac{7}{100} P_1$
• On remplace les données par leur valeur numérique.	$= \dfrac{93}{100} \times P_1$

• On gère la formule.	$18\,600 = 0{,}93\ P_1$ $P_1 = \dfrac{18600}{0{,}93}$
• On exprime le résultat.	Prod initiale = 20 000 t.

V) Recherche d'un indice

Le prix d'un matériau passe de 490 € à 500 € entre 2000 et 2001. Quel est l'indice du prix de ce matériau en 2001, l'année 2000 étant l'année de référence ?

Méthode	**solution**
• On résume le texte	Prix 2001 = $P_{01} = 500$ €. Prix 2001 = $P_{00} = 490$ €
• On compare les prix.	$\dfrac{P_{01}}{P_{00}} = \dfrac{500}{490} \simeq 1{,}020 \simeq \dfrac{102}{100}$
• On exprime le prix 2001 en % du prix 2000.	$P_{01} = \dfrac{102}{100} \times P_{00}$
• On exprime l'indice 2001, l'année 2000 étant prise comme base 100.	indice 2001 (base 100 : 2000) = $I_{01/00} =$ 102,0

Autre méthode

Méthode	**solution**
• On applique la formule	$I_{01/00} = \dfrac{P_{01}}{P_{00}} \times 100$
• On remplace les données par leur valeur numérique.	$= \dfrac{500}{490} \times 100$ $\simeq 1{,}020$
• On exprime le résultat arrondi à 1/10^{e} près.	indice 2001 (base 100 : 2000) = $I_{01/00} =$ 102,0

VI) Recherche d'une production, l'indice et la production de l'année de référence étant connus

La production d'un produit industriel était en 1990 de 35 000 000 t. L'indice de production atteint 132 pour l'année 2000, 1990 étant l'année de référence. Quelle est la production 2000 ?

Méthode	**solution**
• On résume le texte	Production 1990 = P_{90} = 35 000 000 t. $I_{00/90} = 132$
• On exprime la production 2000 en % de la production de l'année de référence.	Production 2000 = $\dfrac{132}{100} \times P_{90}$

• On remplace les données par leur valeur numérique.	$= 1{,}32 \times 35\,000\,000$ $= 46\,200\,000$ t.
• On exprime le résultat.	= 46,2 millions de t.

VII) Recherche du coût de l'année de référence, l'indice et le coût actuel étant connus.

Le coût d'un petit matériel ménager est en 2000 de 20 € ; indice 2000 : 97,2 (l'année 1996 étant l'année de référence). Quel était le coût en 1996 ?

Méthode	**solution**
• On résume le texte	Coût 2000 = 20 €. $I_{00/96} = 97{,}2$
• On exprime le coût 2000 en % du coût de l'année de référence.	Coût 2000 $= \dfrac{97{,}2}{100} \times P_{96}$
• On remplace les données par leur valeur numérique.	$20 = 0{,}972 \times$ coût 1996
• On gère la formule.	
• On exprime le résultat.	Coût 1996 $= \dfrac{20}{0{,}972}$ $\simeq 20{,}58$ €.

VIII) Recherche d'un prix, l'indice ayant varié depuis l'année de référence.

Au moment de la signature en 2000 du contrat de location d'un logement, l'indice du coût de la construction était de 142 (base 100 : année 1972) et le loyer à payer de 460 € par mois.
Un an après, ce même indice est passé à 149.
Quel est le nouveau loyer (arrondi à l'euro supérieur), indexé sur l'indice du coût de la construction ?

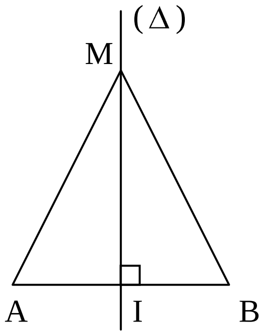
Méthode	**solution**
• On résume le texte	Loyer mensuel (2000) = 460 €. Indice 2000 = 142 Indice 2001 = 149
• On traduit dans un tableau de proportionnalité.	(voir tableau ci-dessous)
• On exprime la grandeur l'année 2000 en fraction de la grandeur l'année 2000.	Loyer mensuel 2001 $= \dfrac{149 \times 460}{142}$ $= \dfrac{149}{142} \times 460$ $\simeq 482{,}68$
• On exprime le résultat.	soit 482,68 €.

Loyer (€)	Indice
-	100
460	142
?	149

Remarque : Le calcul ne nécessite pas de repasser par la grandeur, l'année de référence.

GÉOMÉTRIE

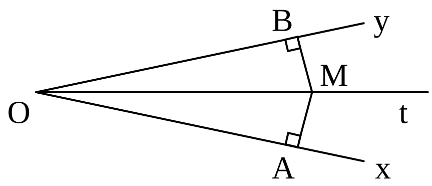
Médiatrice d'un segment



La médiatrice d'un segment [AB] est la droite Δ qui est perpendiculaire à (AB) et qui contient le milieu I du segment [AB].

Propriété
Tout point M de la médiatrice d'un segment [AB] est équidistant des extrémités de ce segment : MA = MB.

Bissectrice d'un angle



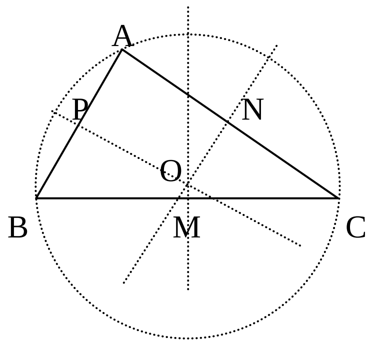
La bissectrice de l'angle xOy est la demi-droite [Ot) qui partage l'angle en deux angles de même mesure.

xOt = tOy

Propriété
Tout point M de la bissectrice d'un angle est équidistant des cotés de cet angle. MA = MB.

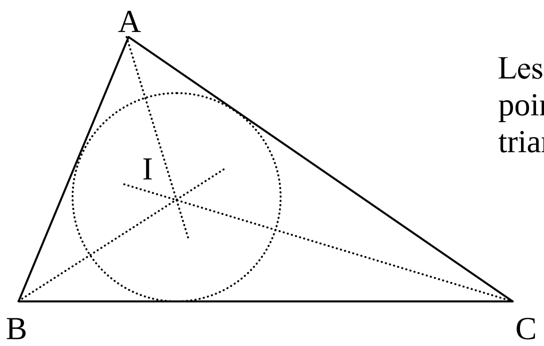
Droites remarquables du triangle

Médiatrices



Les médiatrices d'un triangle sont concourantes : leur point de concours est le centre du cercle circonscrit au triangle.

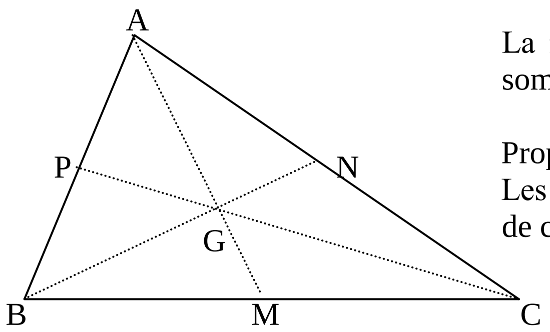
Bissectrices



Les bissectrices d'un triangle sont concourantes ; leur point de concours est le centre du cercle inscrit dans le triangle.

http://maths-sciences.fr

Médianes

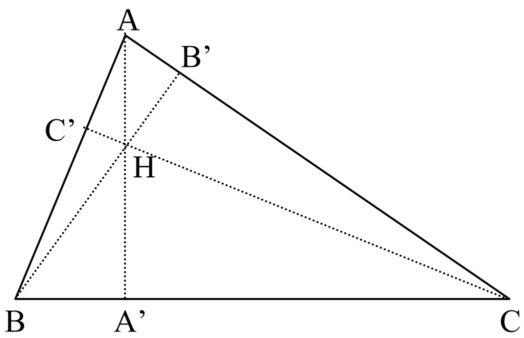


La médiane d'un triangle est la droite qui contient un sommet et le milieu du coté opposé.

Propriété
Les médianes d'un triangle sont concourantes ; leur point de concours G est le centre de gravité du triangle.

$$\text{On a } AG = \frac{2}{3}AM.$$

Hauteurs

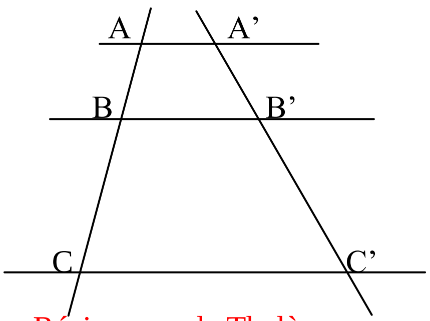


La hauteur d'un triangle est la droite qui contient un sommet et qui est perpendiculaire au coté opposé.

Les hauteurs d'un triangle sont concourantes ; leur point de concours est l'orthocentre du triangle.

Remarque : Dans un triangle équilatéral, médiatrice, bissectrice, médiane et hauteur sont confondues.

Théorème de Thalès



Si les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles, alors

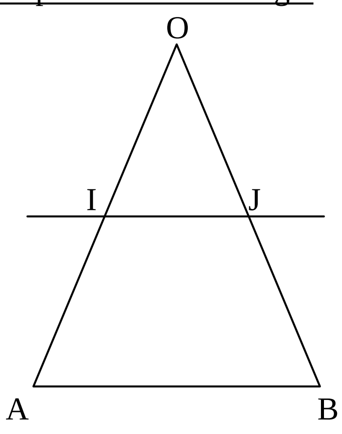
$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

Réciproque de Thalès

Si les droites (AA') et (BB') sont parallèles et si $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$, alors la droite (CC') est parallèle aux droites (AA') et (BB').

Cas particulier du triangle



Dans le triangle OAB, la droite qui contient le milieu I de [OA] et qui est parallèle à (AB) coupe le coté [OB] en son milieu J. On a alors :

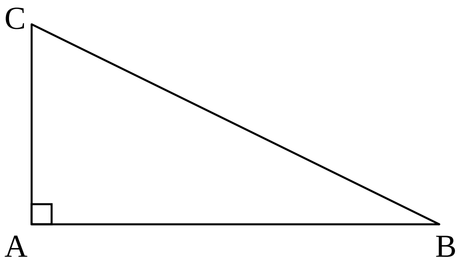
$$\frac{OI}{OA} = \frac{OJ}{OB} = \frac{IJ}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$IJ = \frac{1}{2}AB$$

Réciproquement : dans le triangle OAB, la droite qui contient les milieux I et J des cotés [OA] et [OB] est parallèle au troisième côté (AB).

Triangle rectangle

Théorème de Pythagore

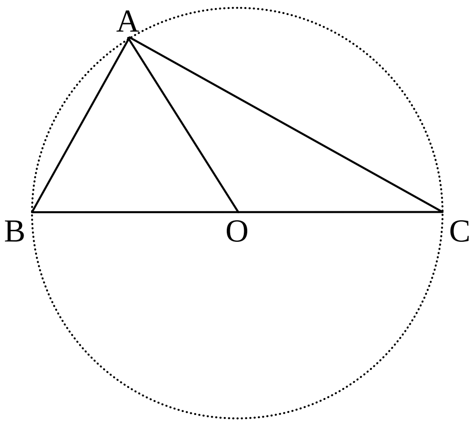


Si le triangle ABC est rectangle en A alors

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

« La somme des carrés des cotés de l'angle droit est égale au carré de l'hypoténuse ».

Propriétés



Si ABC est un triangle rectangle en A et O le milieu de [BC], alors $OA = OB = OC = \frac{1}{2}BC$.

Tout triangle rectangle peut donc s'inscrire dans un demi-cercle dont le diamètre est l'hypoténuse.

LE SYSTÈME BINAIRE

I) Introduction

L'homme a toujours eu besoin de compter et il a inventé la numération décimale sur le modèle des dix doigts de nos mains. On pourrait toutefois noter que l'on a en fait 20 doigts (pied et main). On a aussi inventé la numération qui lui correspond, appelée numération vicésimale. Elle n'a pas eu le succès de la numération décimale mais on en a hérité quatre-vingt (au lieu d'octante ou huitante), quatre vingt dix (nonante).
L'écriture décimale nécessite l'existence de 10 chiffres (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Toute écriture dans un système supérieur à 10 nécessite la création de nouveaux idéogrammes. On les remplace souvent par des lettres.

Base 2	Base 3	Base 4	Base 5	Base 6	Base 7	Base 8	Base 9	**Base 10**	Base 11	Base 12	Base 13
0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	**1**	1	1	1
10	2	2	2	2	2	2	2	**2**	2	2	2
11	10	3	3	3	3	3	3	**3**	3	3	3
100	11	10	4	4	4	4	4	**4**	4	4	4
101	12	11	10	5	5	5	5	**5**	5	5	5
110	20	12	11	10	6	6	6	**6**	6	6	6
111	21	13	12	11	10	7	7	**7**	7	7	7
1000	22	20	13	12	11	10	8	**8**	8	8	8
1001	100	21	14	13	12	11	10	**9**	9	9	9
1010	101	22	20	14	13	12	11	**10**	A	A	A
1011	102	23	21	15	14	13	12	**11**	10	B	B
1100	110	30	22	20	15	14	13	**12**	11	10	C
1101	111	31	23	21	16	15	14	**13**	12	11	10
1110	112	32	24	22	20	16	15	**14**	13	12	11
1111	120	33	30	23	21	17	16	**15**	14	13	12
10000	121	100	31	24	22	20	17	**16**	15	14	13
10001	122	101	32	25	23	21	18	**17**	16	15	14
10010	1000	102	33	30	24	22	20	**18**	17	16	15

Plus la base est importante et moins il faut de chiffre pour écrire un nombre. Exemple 1000 :

En	Ecriture
Base 2 (système binaire)	1 111 101 000
Base 3 (système ternaire)	1 101 001
Base 4 (système quaternaire)	33 220
Base 5 (système quinaire)	13 000
Base 6 (système sénaire)	4344
Base 7 (système septénaire)	2626
Base 8 (système octonaire)	1750
Base 9 (système nonaire)	1331
Base 10 (système décimal)	1000
Base 11 (système undécimal)	82A
Base 12 (système duodécimal)	6B4

II) Systèmes les plus courants

Le système duodécimal : Si le système décimal n'avait pas été universellement adopté, il aurait pu avoir un certain succès dans la mesure ou 12 a un plus grand nombre de diviseurs que 10.

Le système héxadécimal : (16 chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F). Ce système est utilisé en informatique.

Le système sexagésimal : Ce système à base 60 fut élaboré par les babyloniens. Il est encore utilisé pour les mesures de temps et d'angle (heures, minutes, secondes).

Le système binaire : Ce système est très ancien et son existence en Chine remonterait au moins à 25 siècles avant J-C. Au XVII^{e} siècle, Leibniz essaiera de l'imposer sans succès. Ce système connaît son apogée avec l'apparition de l'électronique. Dans les transistors, 0 correspond à l'absence de courant et 1 au passage du courant.
Par convention un nombre élevé à la puissance 0 est égal à 1. Il en découle que tout nombre peut s'écrire sous la forme d'une somme de puissances de 2.

III) Convertir un nombre décimal en binaire

L'écriture binaire repose sur le fait que tout nombre peut s'écrire sous la forme d'une somme de puissances de 2.

1ère méthode

⇨ Comment s'écrit 97 en nombre binaire ?

On commence par chercher la plus grande puissance de 2 contenue dans 97.
Il s'agit de $2^6 = 64$.
On soustrait 64 à 97. Il nous reste 33.
On cherche la plus grande puissance de 2 contenue dans 33.
Il s'agit de $2^5 = 32$.
On soustrait 32 à 33. Il reste 1.
La plus grande puissance de 2 contenue dans 1 est 2^0.
Il en résulte que $97 = \mathbf{1} \times 2^0 + \mathbf{0} \times 2^1 + \mathbf{0} \times 2^2 + \mathbf{0} \times 2^3 + \mathbf{0} \times 2^4 + \mathbf{1} \times 2^5 + \mathbf{1} \times 2^6$

$2^0 = 1$
$2^1 = 2$
$2^2 = 4$
$2^3 = 8$
$2^4 = 16$
$2^5 = 32$
$2^6 = 64$
$2^7 = 128$
$2^8 = 256$
$2^9 = 512$
$2^{10} = 1024$

L'écriture binaire de 97 est donc : **1 0 0 0 0 1 1**.

2ème méthode

⇨ Comment s'écrit 437 en nombre binaire ?

On prépare un tableau avec les puissances de 2 :

…	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1

On reconstitue le nombre décimal à convertir en plaçant des « 1 » dans les colonnes adéquates du tableau : 437 = 256 + 64 + 16 + 8 + 2 + 1

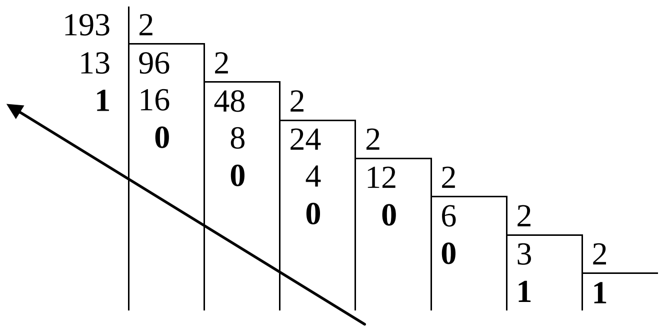
…	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
	0	0	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**

L'écriture binaire de 437 est donc : **1 0 1 0 1 1 0 1 1**.

3ème méthode

Il existe un autre procédé plus rapide pour transférer un nombre du système décimal dans un autre système. Cette méthode consiste à diviser le nombre donné par la base tant que c'est possible. On rassemble ensuite les restes en partant de la fin et on obtient l'écriture dans la nouvelle base.

➪ Comment s'écrit 193 en nombre binaire ?



L'écriture binaire de 193 est donc : **1 1 0 0 0 0 0 1**.

IV) Convertir un nombre binaire en décimal

Soit 1011 le nombre binaire à convertir. Cette écriture est appelée écriture implicite. Pour trouver l'équivalent décimal il suffit d'employer l'écriture explicite.

1 0 1 1 correspond à : $\underbrace{1\times 2^3}_{8} + \underbrace{0\times 2^2}_{0} + \underbrace{1\times 2^1}_{2} + \underbrace{1\times 2^0}_{1}$ soit $1\,0\,1\,1_2 = 11_{10}$

Remarque : quand on travaille simultanément dans différentes bases, il faut indiquer, en indice, la base dans laquelle est écrit chacun des nombres.

V) Utilisation

Nous l'avons dit en introduction que le système binaire trouve son utilité dans tous les domaines liés à l'informatique et l'électronique. Le langage binaire est utilisé pour tout transport d'information par voie électronique. Par exemple les lettres de notre alphabet sont codés par nos ordinateurs en binaire selon les codes ci-dessous :

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**
01000001	01000010	01000011	01000100	01000101	01000110	01000111
H	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**	**N**
01001000	01001001	01001010	01001011	01001100	01001101	01001110
O	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**
01001111	01010000	01010001	01010010	01010011	01010100	01010101
V	**W**	**X**	**Y**	**Z**		
01010110	01010111	01011000	01011001	01011010		

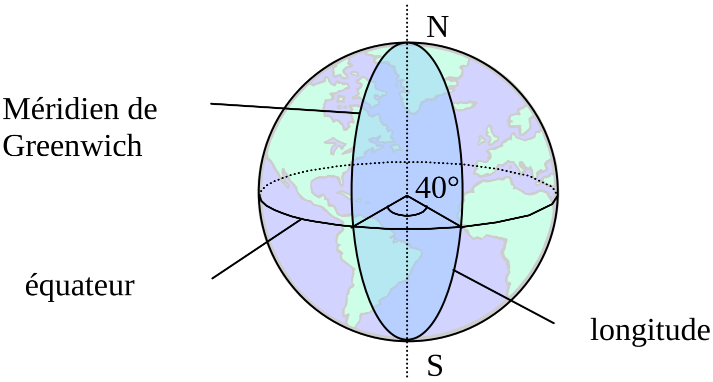
http://maths-sciences.fr

LONGITUDE ET LATITUDE

Le globe est quadrillé par les méridiens, qui tous passent par les pôles, et par les parallèles, qui sont des cercles parallèles à l'équateur.

Longitude

La longitude est un angle, compté de 0° à 180°, dans la direction Est ou Ouest. Cet angle est pris entre un méridien d'origine, celui de Greenwich, et le méridien du lieu où on se trouve.

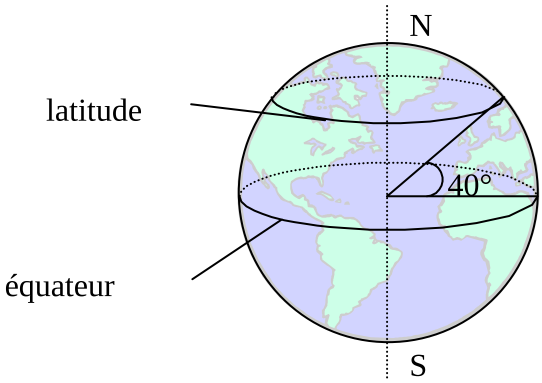


On est à 40° de longitude Est.

• Si le lieu où l'on se trouve est à 15° à l'est de Greenwich, on dira qu'il se trouve à 15° de longitude Est.
• New York, par exemple se trouve à 74° de longitude Ouest.

Latitude

C'est la distance angulaire du lieu où l'on se trouve à l'équateur.



On est à 40° de latitude Nord

• Cette grandeur est comptée de manière positive si l'on va vers le Nord et négative si l'on va vers le Sud.
• Orléans, par exemple se trouve à 48° de latitude Nord et Sydney à 34° de latitude Sud.

Pour situer une ville, il faut donc deux coordonnées auxquelles on peut ajouter l'altitude.
Pour la ville de BLOIS, on a les coordonnées suivantes :

Longitude : 1° 20' E   latitude : 47° 36' N   altitude : 73m

Pour la ville de BIARRITZ, on a les coordonnées suivantes :

Longitude : 1° 33' W   latitude : 43° 29' N   altitude : 40m