# SUITE DE FIBONACCI

*L'italien Fibonacci, dit Léonard de Pise, vécut de 1175 à 1245 environ. Il propagea l'algèbre arabe et l'usage des chiffres arabes par son ouvrage* ***Liber abbaci****. On lui doit aussi la série dite « suite de Fibonacci » :*

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, …

Chaque terme de cette suite est égal à la somme des deux précédents.
Chaque terme est égal à la différence entre ses deux voisins.

Si on note $U_n$ le terme de rang n de la suite de Fibonacci, celle-ci est définie par la relation récurrente :

$U_0 = 1$ ; $U_1 = 1$
et $U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$ pour tout n > 1

<u>Cette suite contient de nombreuses propriétés</u> :

- Si on additionne les cinq premiers termes en ajoutant 1, on obtient le septième. Si on additionne les six premiers termes en ajoutant 1, on obtient le huitième et ainsi de suite.

- Tout nombre de cette suite élevé au carré est égal au produit des deux nombres voisins augmenté ou diminué de 1, les signes +1 et –1 alternant tout au long de la suite.

$$(U_n)^2 = U_{n+1} \times U_{n-1} - (-1)^n \text{ pour tout } n > 1$$

- Si on additionne les nombres de Fibonacci en sautant un terme à chaque fois (sans oublier le premier) on obtient le nombre qui vient juste après :

$$1+1+3+8+21 = 34$$

$$1+2+5+13+34 = 55$$

- Si on prend par exemple le 4$^{ème}$ terme en l'élevant au carré ($3^2 = 9$) et qu'on procède à la somme du 5$^{ème}$ terme élevé au carré ($5^2 = 25$) on obtient le 9$^{ème}$ terme de la suite.

- La suite de Fibonacci possède encore une autre propriété : elle fournit un mode de calcul du nombre d'or souvent noté $\tau$ ou $\varphi$ appelé nombre d'or. Ce nombre mesure la vieille section d'or des grecs. Sur un segment AB, la section d'or est déterminée par un point C tel qu'on ait


AB/AC = AC/CB. Chacun des ces quotients est alors égal au nombre d'or et vaut $(1+\sqrt{5})/2$, c'est à dire 1,61803398…

On démontre que le rapport entre le (n+1)-ième terme et le n-ième terme (c'est à dire le rapport entre deux éléments consécutifs de cette suite) tend vers le nombre d'or lorsque n tend vers l'infini.

# ACTIVITÉS

## Activité 1 : Le calculateur prodige

*Ce jeu décrit par R. V. Heath, est fondé sur une variante de la suite de Fibonacci.*

Proposer à quelqu'un d'écrire à votre insu deux chiffres inférieurs à 10, l'un au dessous de l'autre. Lui demander de les additionner. Mettre le total en dessous. Et continuer ainsi en additionnant toujours les deux derniers nombres jusqu'à obtenir une colonne de 10 nombres.
Sur le vu de cette colonne, que vous découvrez alors, sans compter, vous annoncez le total des 10 nombres.

Clé : ce total, c'est le 4$^{\text{ème}}$ nombre, en commençant par la fin, multiplié par 11.

Exemple :

6
5
11
16
27
43
70
113
183
296

En partant du bas de la colonne, le quatrième nombre est 70.
Multiplié par 11, on obtient 770.
Vérifier : la somme des 10 nombres est bien 770.

## Activité 2 : La reproduction des lapins

La suite de Fibonacci permet de décrire la reproduction des lapins :

On suppose que les lapins naissent blancs et s'assombrissent une fois adulte (un mois plus tard). Une fois adulte, les lapins doivent attendre un mois avant d'avoir des petits (on considère qu'ils n'en ont que deux : un mâle et une femelle).

On commence avec un jeune couple de lapins (blanc). Soit $U_0 = 1$.

Le mois suivant les jeunes lapins sont devenus adultes.
On n'a toujours qu'un couple. $U_1 = 1$

Le mois d'après, le couple de lapins a donné un couple de lapins.
On a donc deux couples. $U_2 = 2$.

Un mois plus tard, le couple donne un nouveau couple de jeunes lapins blancs, tandis que les lapins de la première génération deviennent adultes. On a trois couples soit $U_3 = 3$

Et ainsi de suite comme le décrit le tableau …