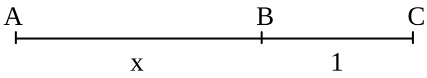
# LE NOMBRE D'OR

## Présentation et calcul du nombre d'or

Euclide avait trouvé un moyen de partager en deux un segment selon en « extrême et moyenne raison »
Soit un segment [AB]. Le partage d'Euclide consiste à trouver un point C sur ce segment de telle façon qu'on ait :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{AB}$$




On pose AB = x et BC = 1. On a donc AC = $x$ + 1 et

$$\frac{x}{1} = \frac{x+1}{x}$$

d'où $$x = \frac{x+1}{x}$$

et par conséquent : $$x^2 = x + 1$$

ou encore : $$x^2 - x - 1 = 0$$

Résolution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$
On calcule le discriminant ($\Delta$)

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$

Comme le discriminant est positif, cette équation admet deux solutions :

$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

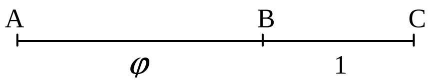
Avec un calcul vu au lycée, on démontre que cette solution admet deux solutions dont une seule nous intéresse :

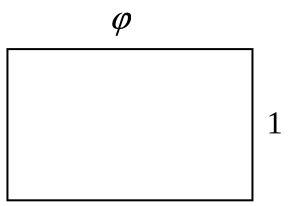
$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Ce nombre est appelé le nombre d'or depuis le XV$^e$ siècle. On le note $\varphi$ (la lettre grecque phi en hommage au sculpteur grec Phidias) ou encore $\tau$ (tau, autre lettre de l'alphabet grec).

La valeur approchée du nombre d'or est $\varphi$ = 1,61803398874989484820… (il y a une infinité de décimales derrière la virgule)

Si à partir du segment [AB], on rabat le segment [BC] perpendiculairement, on obtient un rectangle appelé rectangle d'or (rectangle dont le rapport longueur/largeur = $\varphi$) .





# Propriétés du nombre d'or

## Le carré du nombre d'or

Comme le nombre d'or est issu de l'équation $x^2 = x + 1$, on a $\varphi^2 = \varphi + 1$

**Si on ajoute 1 au nombre d'or, on obtient son carré.**

Les autres puissances de $\varphi$ s'écrivent :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi^2$ | $\varphi^3$ | $\varphi^4$ | $\varphi^5$ | $\varphi^6$ | … |
| $\varphi+1$ | $2\varphi+1$ | $3\varphi+2$ | $5\varphi+3$ | $8\varphi+5$ | |

On remarque que chaque puissance est la somme des deux précédente. C'est ce qu'on retrouve dans la suite de Fibonacci.

## L'inverse du nombre d'or

Comme le nombre d'or est issu de l'équation $\frac{x}{1} = \frac{x+1}{x}$ on a :

$$x - 1 = \frac{x+1}{x} - 1$$

ou encore : $$x - 1 = \frac{x}{x} + \frac{1}{x} - 1$$

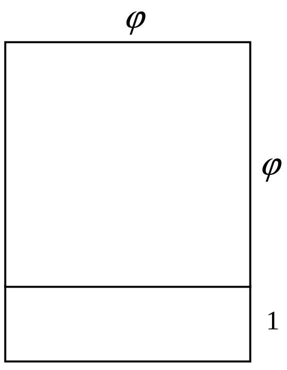
soit : $$x - 1 = 1 + \frac{1}{x} - 1$$

ce qui conduit à : $$x - 1 = \frac{1}{x}$$

**Pour calculer l'inverse du nombre d'or, il suffit de lui retirer 1.**

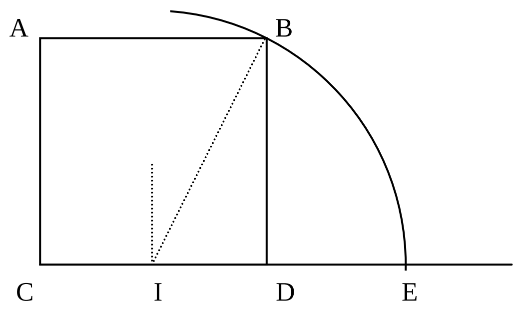
## Le rectangle d'or

**Si on ajoute un carré de coté $\varphi$ à un rectangle d'or** de longueur $\varphi$ et de largeur 1, **on obtient un autre rectangle d'or** de longueur $\varphi+1$ et de largeur $\varphi$.



## Construction du nombre d'or à la règle et au compas

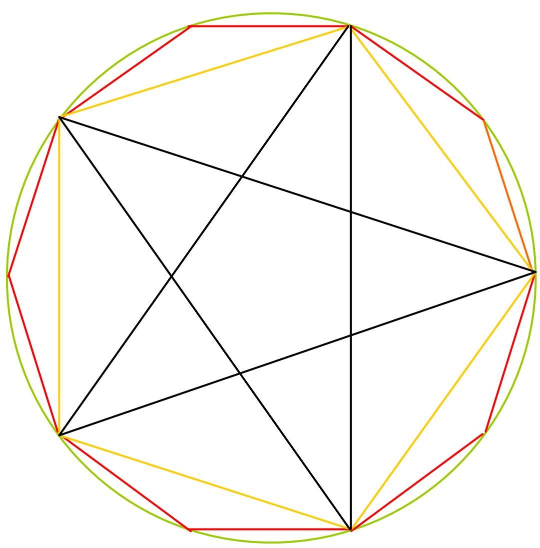
Pour cela, il suffit de tracer un carré de coté 1, de pointer le compas au centre d'un des cotés et de tracer le cercle qui passe par le sommet opposé. Le nombre d'or est donné par l'intersection du prolongement de ce coté du carré avec le cercle tracé.




*Démonstration*
Comme ABCD est un carré, le triangle BDI est un triangle rectangle.
D'après le théorème de Pythagore, on a $BI^2 = DI^2 + BD^2$
BD = 1 et comme I est le milieu de [CD] donc DI = 1/2.
On a donc $BI^2 = 1 + (1/2)^2$
Soit $BI = \sqrt{1+\frac{1}{4}}$ ou encore $BI = \sqrt{\frac{5}{4}}$ ce qui donne $BI = \frac{\sqrt{5}}{2}$
Pour le cercle de centre I représenté sur la figure [IE] est un rayon, donc IE = IB.
Comme CE = CI + IE, on a donc $CE = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$. C'est bien le nombre d'or.

## Construction d'un pentagone à la règle et au compas

Dans un cercle de rayon 1 (en vert sur la figure) tracez dix cordes de longueur $1/\varphi$. Vous avez alors construit un décagone (en rouge). Relier les sommets un sur deux (en jaune sur la figure). Vous avez alors un pentagone. Si vous tracez les diagonales de ce pentagone vous formez une étoile ou pentagone croisé.
**Le rapport entre la longueur du coté de cette étoile et la longueur du coté du pentagone est égal au nombre d'or.**



## Le nombre d’or en fraction

Le nombre d’or peut s’écrire sous la fraction continue la plus simple qu’on puisse imaginer :

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}}}}$$

$$1+\frac{1}{1+1} = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad ; \quad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}} = 1+\cfrac{1}{\frac{3}{2}} = 1+\frac{2}{3} = \frac{5}{3} \quad ;$$

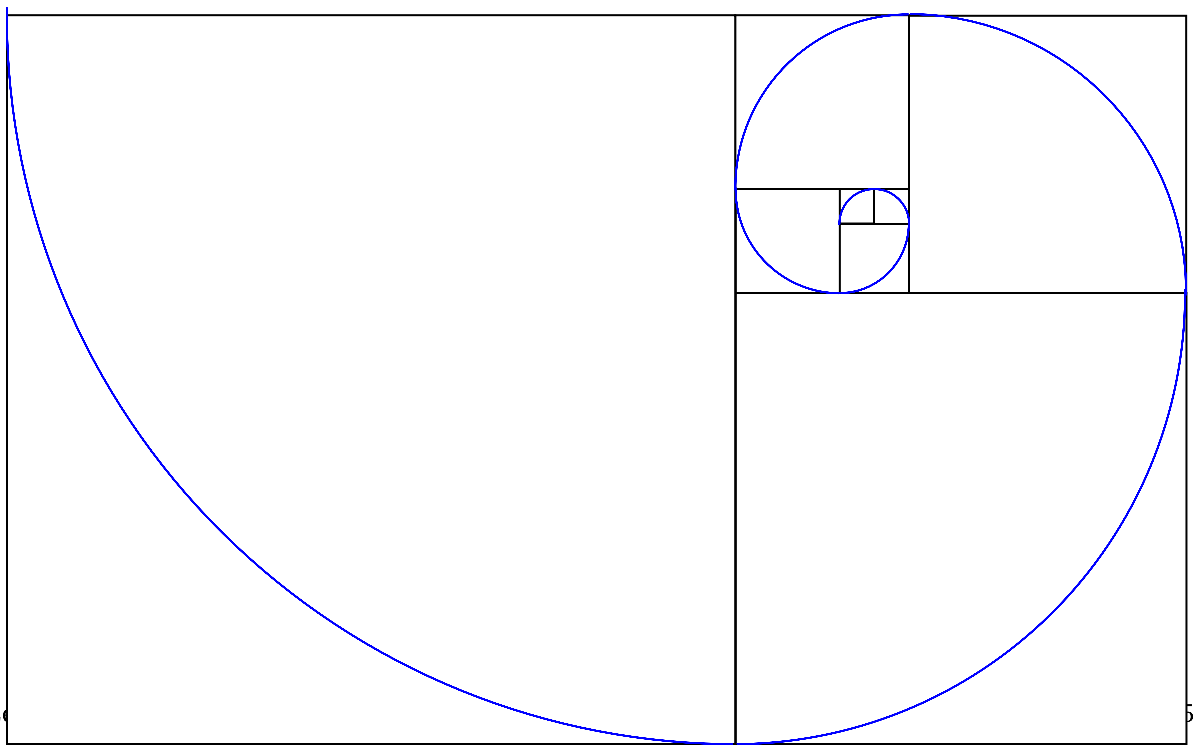
$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}} = 1+\cfrac{1}{\frac{5}{3}} = 1+\frac{3}{5} = \frac{8}{5} \quad ; \quad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}}} = 1+\cfrac{1}{\frac{8}{5}} = 1+\frac{5}{8} = \frac{13}{8}$$

En continuant on obtient : $\frac{3}{2}$ ; $\frac{5}{3}$ ; $\frac{8}{5}$ ; $\frac{13}{8}$ ; $\frac{21}{13}$ ; $\frac{34}{21}$ ; $\frac{55}{34}$ ; $\frac{89}{55}$ ; $\frac{144}{89}$ ; …

**On constate que les nombres constituant les dénominateurs et les numérateurs des fractions sont les nombres de la suite de Fibonacci.**

## Illustration géométrique

Cette propriété vue précédemment peut s’illustrer géométriquement. Pour cela on trace tout d’abord deux carrés de cote 1, puis un carré de coté 2, un carré de coté 3, un carré de coté 5, un carré de coté 8, un carré de coté 13 …



On retrouve la suite de Fibonacci dans la longueur des carrés : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …
Vous tracez dans chaque carré un quart de cercle de rayon égal à la longueur du coté du carré considéré. Vous obtenez une spirale.

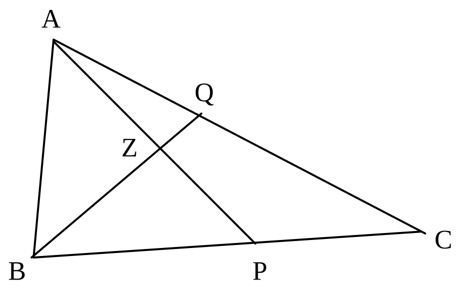
Dans cette figure on observe aussi des rectangles. Plus les dimensions augmentent et plus ce sont des rectangles qui ont des proportions des rectangles d'or.

Ces spirales régies par le nombre d'or se retrouvent dans la nature : la spirale de la coquille du nautile, la disposition des fleurons dans une fleur de tournesol et des écailles des pommes de pin et d'ananas, dans les étamines des fleurs de magnolia…

## Encore d'autres propriétés

On retrouve le nombre d'or dans beaucoup de problèmes de mathématiques.

⇨ On considère la figure suivante : un triangle ABC muni des points P sur BC et Q sur CA tels que $\frac{BP}{BC} = \frac{CQ}{CA} = k$ . Les segments AP et BQ se coupent au milieu de AP. Que vaut k ?




⇨ Si vous découpez un disque de rayon 1 dans un disque de rayon $\varphi$ alors le centre de gravité de l'ensemble se situe au point indiqué (voir figure). Concrètement cela veut dire que si vous fabriquez cette figure avec une plaque de tôle homogène alors l'objet suspendu en son centre de gravité aura la position horizontale.