EXERCICES SUR LE CALCUL VECTORIEL

Exercice 1

Étude de l'angle d'inclinaison de la vis sans fin d'un élévateur dans une position donnée.

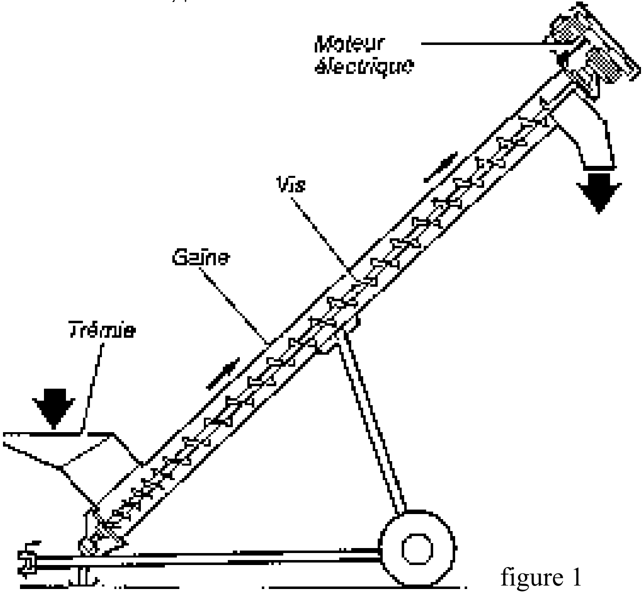


figure 1

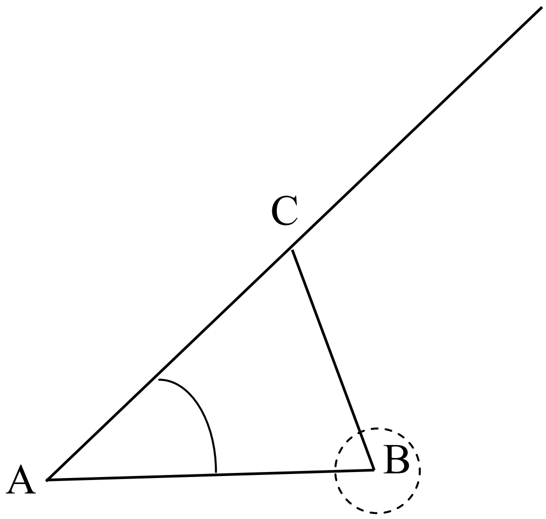


figure 2

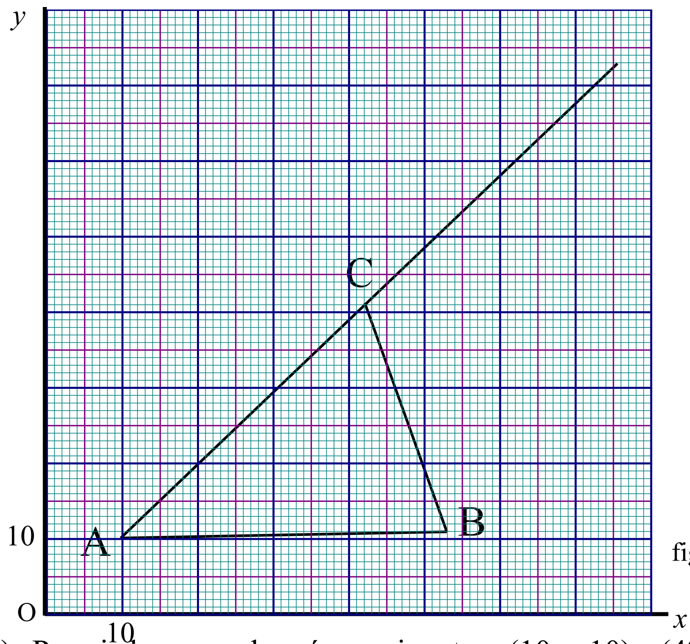


figure 3

La figure 2 est la schématisation de l'élévateur à vis sans fin de la figure 1.

La figure 3 est le schéma placé dans un plan rapporté à un repère orthonormal d'unité graphique 1mm.

1) Parmi les coordonnées suivantes (10 ; 10), (42 ; 41) et (53 ; 11), déterminer les coordonnées des points A, B et C.

2) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

4) Calculer les valeurs exactes des normes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

5) Pour la suite du problème, afin de simplifier les calculs et compte tenu de la précision attendue, on prendra : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1407$ $\quad \|\overrightarrow{AB}\| = 43$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = 45$.

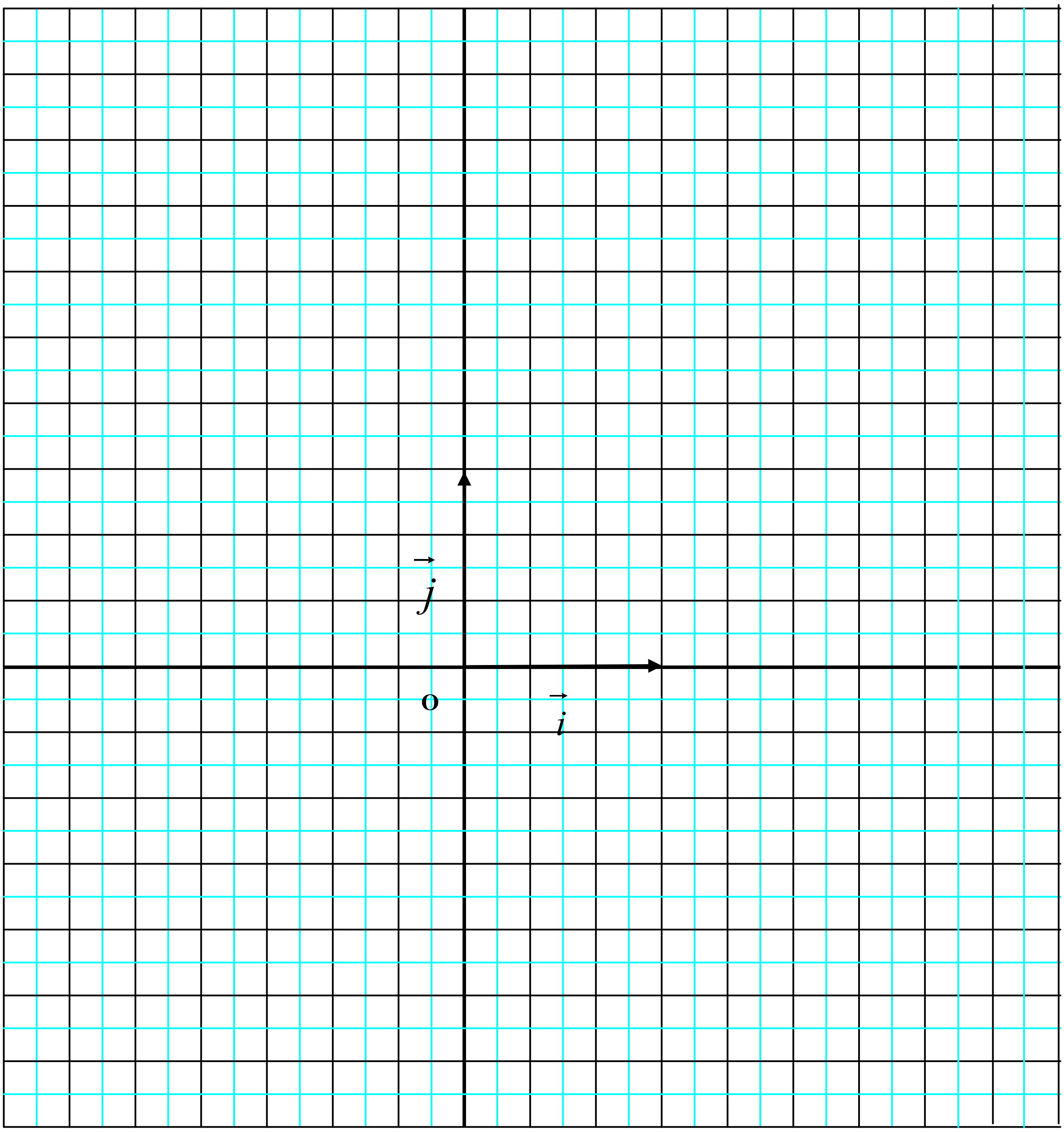
Calculer, arrondie au degré, une valeur de l'angle $\left(\overrightarrow{AB} \; ; \; \overrightarrow{AC}\right)$.

(*D'après sujet Bac Pro Maintenance des matériels A, B et C Session 2004*)

Exercice 2

Dans le plan rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les trois points A, B et C par leurs coordonnées : A (– 2 ; 2) B (3 ; 1) C (1 ; - 2)

1) Placer les points A, B, C dans le repère suivant. $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 3cm$



2) Calculer les coordonnées et les normes de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

3) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

4) Calculer l'angle α des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. (Donner le résultat au degré près) Vérifier le résultat trouvé par une mesure sur le graphique

5) Soit G le centre de gravité du triangle. Placer le point G en construisant le vecteur $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

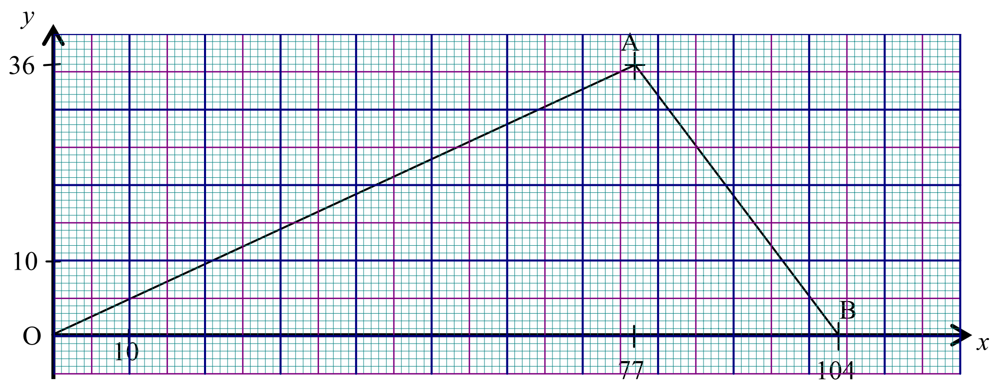
Calculer les coordonnées et la norme de $\overrightarrow{AG}$. Mesurez la longueur AG sur le graphique. Le résultat correspond-il à celui du calcul ?

(*D'après sujet de Bac Pro MAVA sujet de remplacement Poitiers Session juin 2004*)

<u>Exercice 3</u>

Un moteur est suspendu à un palan à l'aide d'une chaîne et de trois manilles en O, A et B.
L'objectif du problème est de déterminer la valeur de l'angle $\widehat{OAB}$ et de vérifier le respect d'une consigne de sécurité associée à ce montage.

Pour une modélisation de ce problème, on considère le repère orthonormal d'origine O, d'axes (Ox) et (Oy) tel que les points A et B ont respectivement pour coordonnées (77 ; 36) et (104 ; 0). L'unité graphique de ce repère représente 1 mm dans la réalité.



1) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{AB}$.

2) Calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{AO}$.

Pour la suite du problème on considère que : $\left\|\overrightarrow{AO}\right\| = 85$ et $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 45$.

3) Montrer que le produit scalaire $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}$ est égal à – 783.

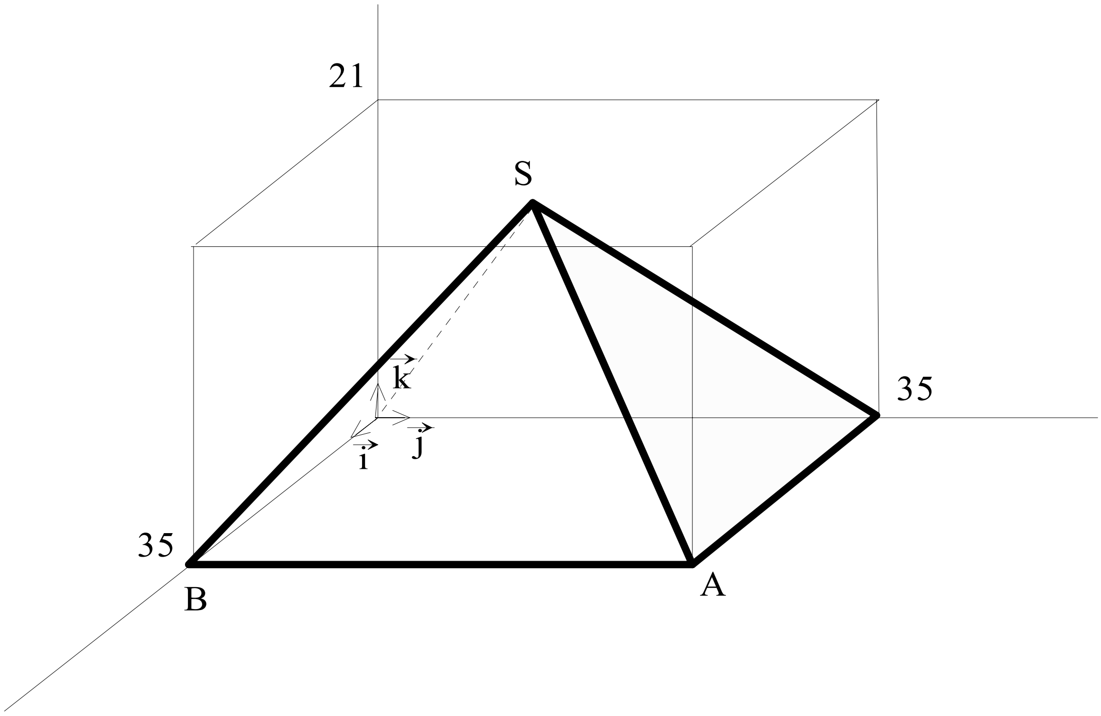
4) Montrer que la valeur arrondie à 10^{-3} de cos $\widehat{OAB}$ est égale à - 0,205.

5) En déduire la valeur de l'angle $\widehat{OAB}$ (arrondir au degré).

6) Compte tenu des caractéristiques de la chaîne et des efforts fournis sur celle-ci, la consigne de sécurité stipule que la valeur de l'angle $\widehat{OAB}$ doit être inférieur à 100°.
Conclure.

(*D'après sujet de Bac Pro MEMATPPJ Session 2002*)

Exercice 4



La pyramide du Louvre a une base carrée de 35 m de côté et une hauteur de 21 m (en réalité 21,64 m).

On se propose de calculer l'aire de la surface vitrée.

Considérons la face vitrée triangulaire ABS.

1) Dans le repère orthonormal $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ d'unité graphique 1 mètre, déterminer les coordonnées des points A ; B et S.

2) Montrer que les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AS}$ sont :

$$\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l}0\\-35\\0\end{array}\right. \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AS}\left|\begin{array}{l}-17{,}5\\-17{,}5\\21\end{array}\right.$$

3) Calculer les normes $\|\overrightarrow{AB}\|$ et $\|\overrightarrow{AS}\|$ des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AS}$.

4) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AS}$.

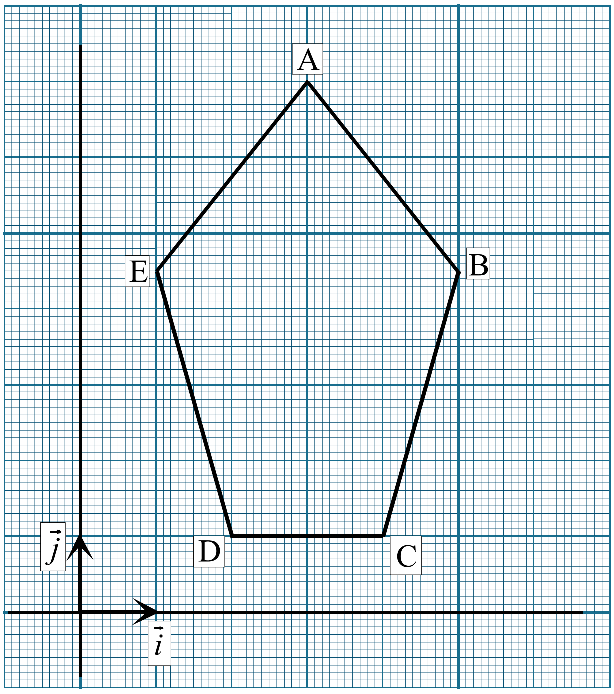
5) En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAS}$ au degré près.

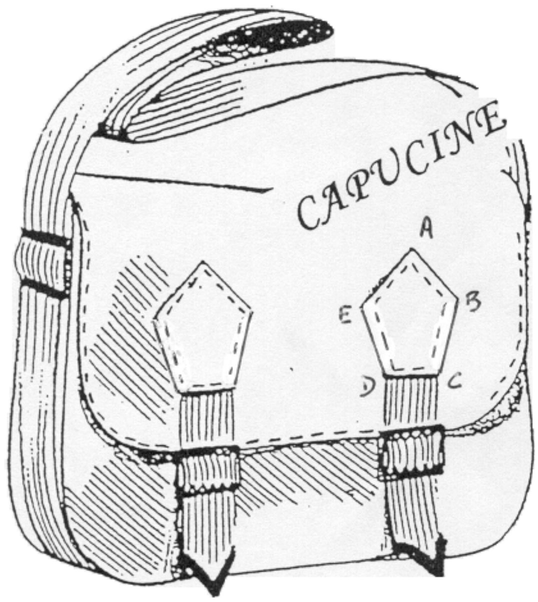
6) Calculer l'aire du triangle ABS et l'aire totale de vitrage de cette pyramide (résultats au m² près).

(*D'après sujet de Bac Pro Aménagement finitions antilles Session 2001*)

Exercice 5

Pour la réalisation du sac "CAPUCINE" ci-dessous, on est amené à découper la pièce ABCDE dans du cuir. Cette pièce est représentée dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ci-dessous.





1) a) Déterminer graphiquement les coordonnées des points A, B et E.

b) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB}$.

c) Calculer les normes $\|\overrightarrow{AE}\|$ et $\|\overrightarrow{AB}\|$. Donner les résultats arrondi à 10^{-1}.

2) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB}$ et en déduire la mesure en degrés de l'angle $\widehat{EAB}$.
Donner le résultat arrondi au degré.

3) La pièce ABCDE est représentée à l'échelle 1 sur le repère.
En relevant sur le graphique les valeurs utiles, calculer l'aire de la pièce ABCDE.
Donner le résultat arrondi au cm^2.

(*D'après sujet de Bac Pro Artisanat et métiers d'art Session 2000*)

Exercice 6

Un réservoir a la forme suivante, dessinée en perspective.
Dans un repère orthonormal d'origine O, où l'unité de longueur est le centimètre, les points A, B et F ont pour coordonnées :

A (45 ; 0 ; 0), B (45 ; 25 ; 20), et F (45 ; 25 ; 0).

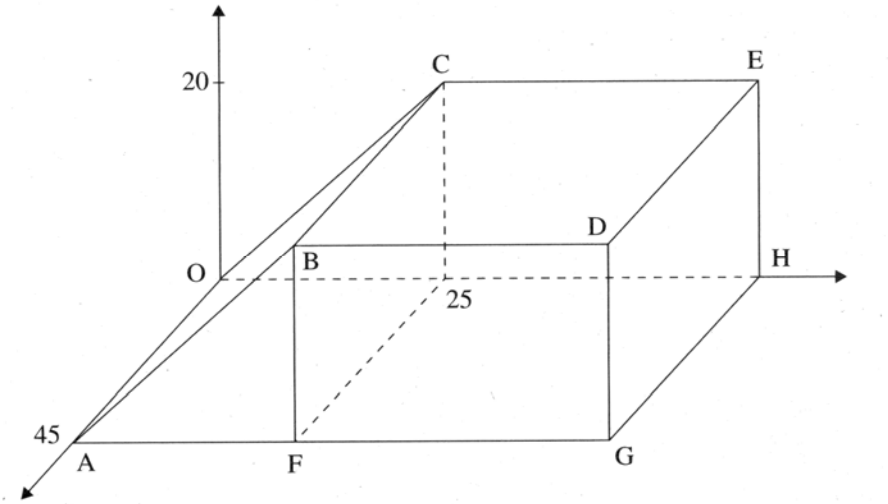
ABCO, *BDEC* et *AGHO* sont des rectangles.

1) Déterminer les longueurs des segments *OA*, *AF*, *BF*, *BC*.

2) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
En déduire la longueur *AB*. (On donnera sa valeur exacte, puis sa valeur arrondie à l'unité).

3) Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAF}$, arrondie à l'unité, en degrés.

4) On donne la longueur $BD = 35$.
Calculer l'aire de la face, en forme de trapèze, délimitée par les points A, B, D, G, puis le volume du réservoir en cm^3 et enfin en litres.



(D'après sujet de Bac Pro Maintenance automobile Session 1999)

Exercice 7

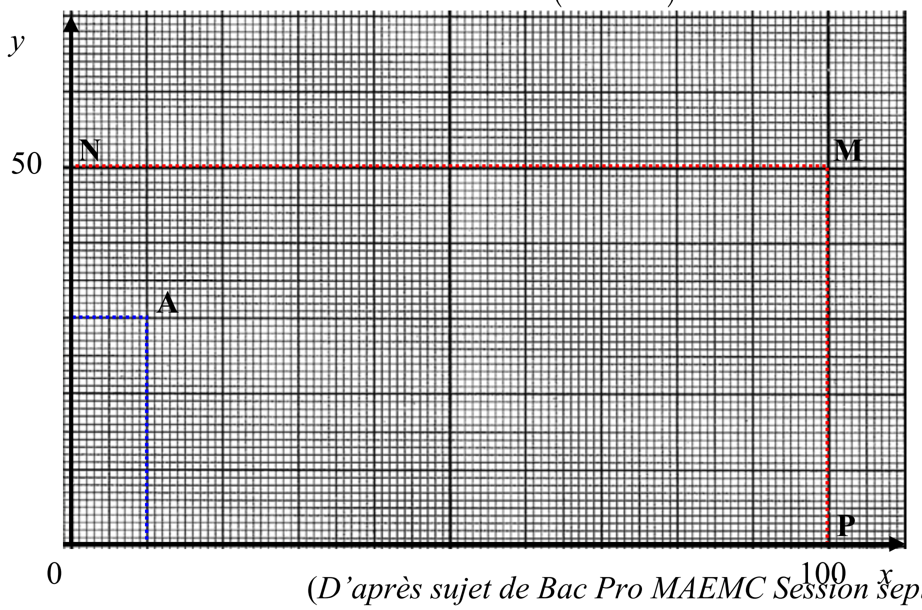
Dans le but de percer certains trous dans une plaque rectangulaire avec une perceuse à commande numérique, on place cette plaque *MNOP* dans le repère orthonormé (Ox, Oy) comme indiqué sur le graphique ci-après.
Les coordonnées du point A sont, dans ce repère : A (10 ; 30).
Le point C est défini dans ce repère par les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ (80 ; - 20).

1) Tracer dans le repère de la page suivante le vecteur $\overrightarrow{AC}$, puis donner les coordonnées du point C.

2) Calculer la distance AC au centième près.

3) Le point B est défini par les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$ (60 ; 0). Calculer la distance BC.

4) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$ puis l'angle $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}\right)$ au degré près.



(D'après sujet de Bac Pro MAEMC Session septembre 2001)

Exercice 8

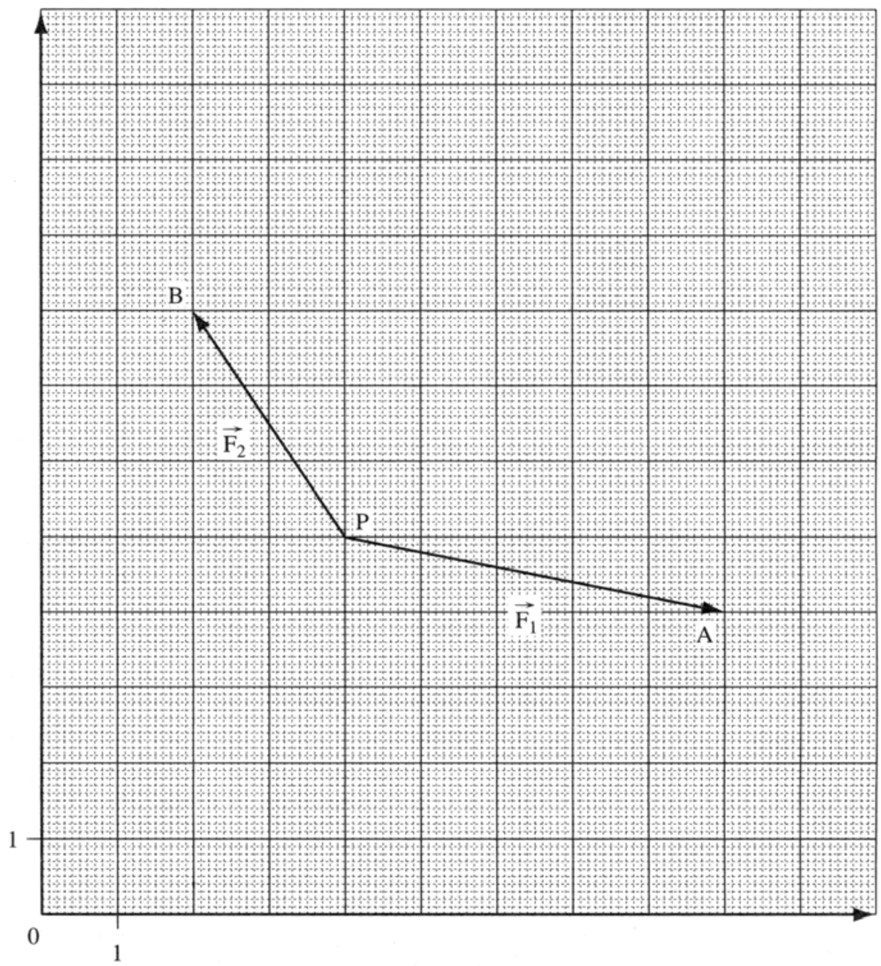
Le plan est rapporté à un repère (Ox, Oy) ayant le cm pour unité graphique.

Le point P est en équilibre sous l'action de trois forces $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ et $\overrightarrow{F_3}$

1) Représenter sur le graphique suivant la somme vectorielle $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$
2) En déduire: - la force $\overrightarrow{F_3}$ que l'on représentera par le vecteur $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{F_3}$
   - les coordonnées du point C.
3) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ et $\overrightarrow{PC}$
4) Calculer les longueurs PA, PB et PC arrondies à 0,1 cm.

5) a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$.
b) En déduire la mesure en degrés de l'angle $\widehat{\mathrm{APB}}$ arrondie à l'unité.

6) a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC}$.
b) En déduire la mesure en degrés de l'angle $\widehat{\mathrm{BPC}}$ arrondie à l'unité.

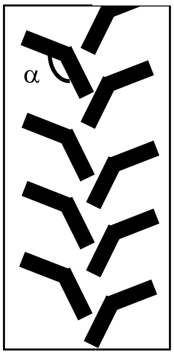


(*D'après sujet de Bac Pro Travaux publics Session septembre 2001*)

Exercice 9

Un fabriquant de pneumatiques a réalisé une étude sur le terrain afin de minimiser le glissement d'un tracteur. Cette étude a montré que le glissement varie en fonction de l'angle α des barrettes du pneu schématisées figure ci-après.

Ce glissement est minimal pour un angle α compris entre 154° et 158° : $154° < \alpha < 158°$.
On se propose de valider la valeur de l'angle α des barrettes du pneu considéré.



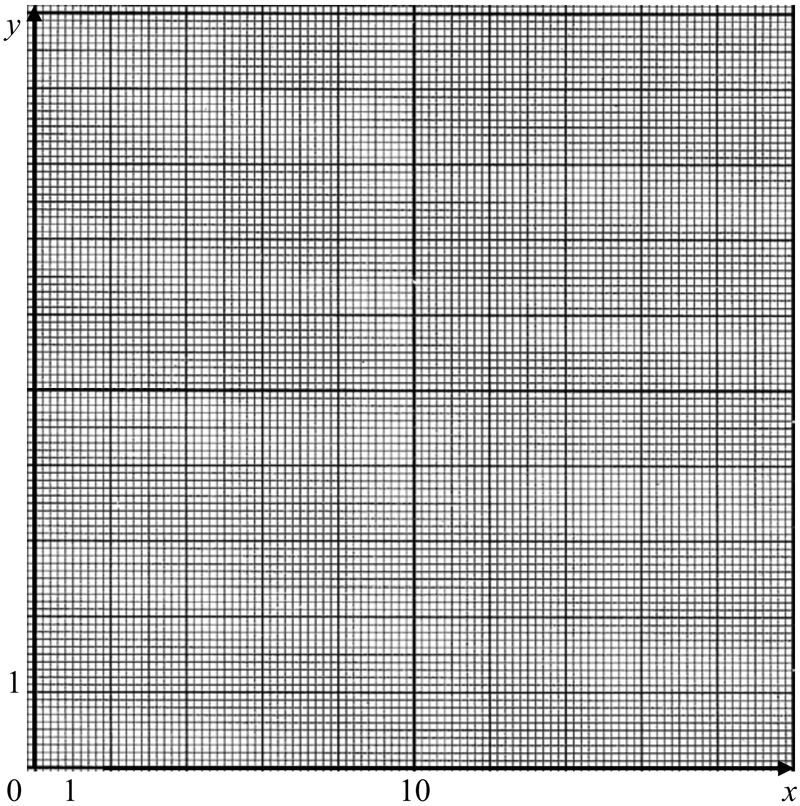
On modélise la barrette en vue de dessus.
1) Dans le plan suivant rapporté au repère orthogonal d'axes (Ox, Oy) placer les points A, B, C, D, E, F de coordonnées respectives : (0 ; 6), (8 ; 5), (15 ; 1), (16 ; 3), (9 ; 7), (0 ; 8) et tracer le polygone $ABCDEF$.

2) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

3) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

4) Calculer les normes des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ (on donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième).

5) Montrer que $\cos \widehat{ABC} = -0,923$ et en déduire la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie au degré.



(*D'après sujet de Bac Pro MEMATPPJ Session juin 2002*)