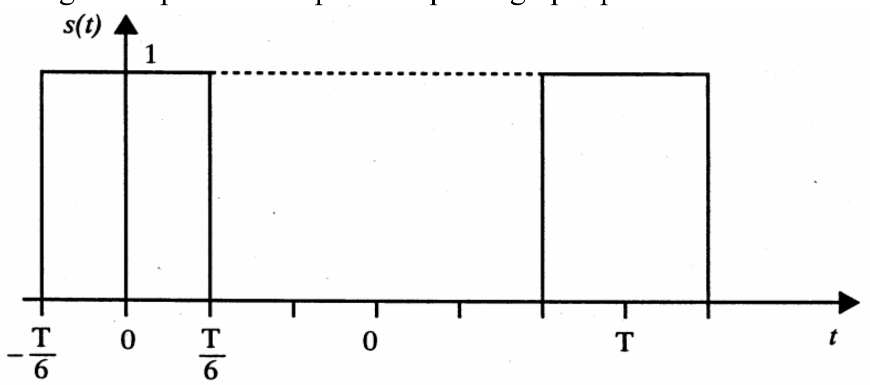
CONTRÔLE SUR L'APPROXIMATION D'UN SIGNAL PÉRIODIQUE

Exercice 1

On considère le signal de période T représenté par le graphique ci-dessous.



Il est défini par la fonction s telle que :

$$s(t) = 1 \quad \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{6} \quad \text{ou si} \quad T - \frac{T}{6} \leq t \leq T$$

$$s(t) = 0 \quad \text{si} \quad \frac{T}{6} < t < T - \frac{T}{6}$$

Le polynôme de Fourier associé à ce signal s est de la forme :

$$P_n(t) = a_0 + a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t) + \ldots + a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)$$

On rappelle que les coefficients de Fourier sont donnés par les relations :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\,dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos(n\omega t)\,dt \quad \text{pour } n \geq 1$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin(n\omega t)\,dt$$

1.1) Peut-on dire, d'après son graphique, si le signal s est pair ou impair ?
1.2) Que peut-on en déduire pour certains coefficients de son polynôme de Fourier ?

2.1) Calculer a_0.
2.2) Calculer a_1.
2.3) Calculer a_2.

3) Écrire $P_2(t)$

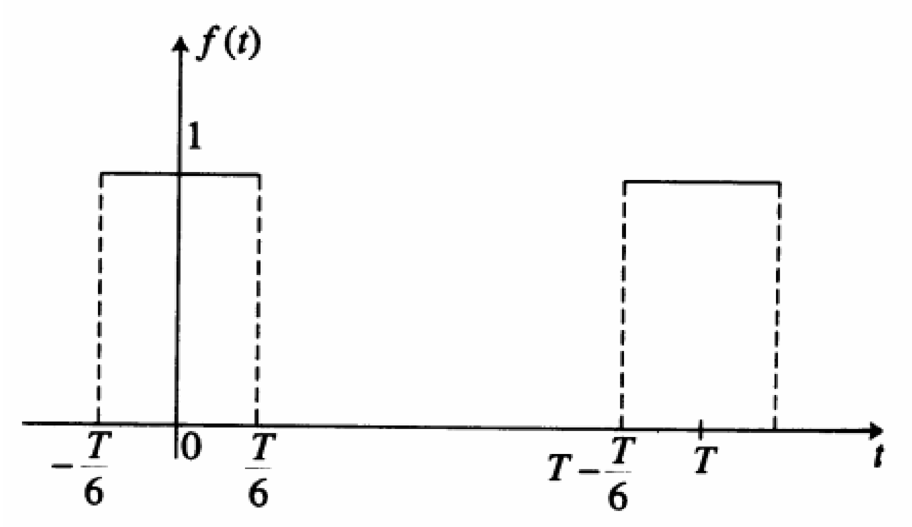
4) Calculer l'énergie moyenne E transportée par ce signal s durant une période.
On rappelle que E est donnée par :

$$E = \frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)\,dt$$

(*D'après sujet de Bac Pro Industriel Session 1998*)

Exercice 2

On considère la fonction f représentée par le graphique ci-dessous.



Cette fonction est paire et de période T. Elle est définie par :

$$f(t) = 1 \text{ pour } t \text{ appartenant à l'intervalle } \left[-\frac{T}{6}; \frac{T}{6}\right]$$

$$f(t) = 0 \text{ pour } t \text{ appartenant à l'intervalle } \left]\frac{T}{6}; T-\frac{T}{6}\right[$$

1) Montrer que $a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/6}^{T/6} f(t)\,dt$ et que pour $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/6}^{T/6} f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/6}^{T/6} f(t)\,\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt.$$

2) Sachant que cette fonction est paire, donner la valeur de b_n.

3) Calculer a_0.

4) Déterminer l'expression de a_n en fonction de n.
Calculer a_1 et a_2.

(*D'après sujet de Bac ProMaintenance audiovisuel électronique Session 1993*)