DEVOIR SUR L'APPROXIMATION D'UN SIGNAL PÉRIODIQUE

Exercice 1

On considère la fonction *f* définie, pour tout nombre réel x, par $f\left(x\right)=\pi x^{2}+8x+\dfrac{\pi^{3}}{6}$.

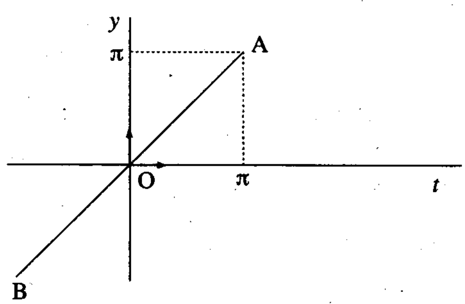
1) On note *f'* la fonction dérivée de la fonction *f*. Exprimer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$.
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation, d'inconnue x, $2\pi x+8=0$.
3) Compléter le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\dfrac{4}{\pi}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		0	
Sens de variation de la fonction *f*			

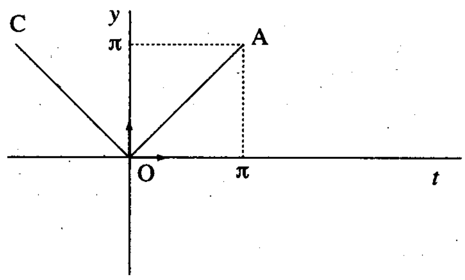
4) Indiquer quelle est valeur (exacte) de x pour laquelle la valeur de $f(x)$ est minimale.

Exercice 2

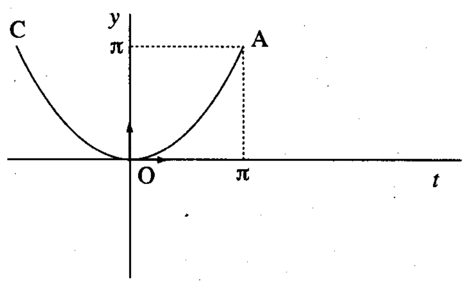
Le signal u est un signal pair, périodique de période 2π tel que $u(\pi)=\pi$. Ce signal, considéré sur l'intervalle $\left[-\pi\ ;\ \pi\right]$, a pour représentation, dans le plan rapporté au repère $\left(\mathrm{O}t,\mathrm{O}y\right)$, l'un des trois graphiques présentés ci-dessous.



Graphique n° 1 : il est constitué par le segment de droite $[AB]$ où A est le point de coordonnées $\left(\pi\ ;\ \pi\right)$ et B le point de coordonnées $\left(-\pi\ ;\ -\pi\right)$.



Graphique n° 2 : il est constitué par la réunion des segments de droite $[OA]$ et $[OC]$ où A est le point de coordonnées $\left(\pi\ ;\ \pi\right)$ et C le point de coordonnées $\left(-\pi\ ;\ \pi\right)$.



Graphique n° 3 : c'est la représentation graphique dans le plan rapporté au repère $\left(\mathrm{O}t,\mathrm{O}y\right)$ de la fonction définie sur $\left[-\pi\ ;\ \pi\right]$ par $t\mapsto\dfrac{t^{2}}{\pi}$.

Parmi les trois graphiques précédents, indiquer, en justifiant la réponse donnée, ceux qui sont susceptibles de représenter, dans le plan rapporté au repère $(\mathrm{O}t, \mathrm{O}y)$, le signal u considéré sur l'intervalle $[-\pi \; ; \; \pi]$.

Pour toute la suite de l'exercice (parties B, C, D), on admet que la représentation, dans le plan rapporté au repère $(\mathrm{O}t, \mathrm{O}y)$, du signal u considéré sur l'intervalle $[-\pi \; ; \; \pi]$ est le graphique numéro 2.

Partie B

1) On considère le graphique n°2 précédent.

a) Calculer le coefficient directeur de la droite (OA).

b) Déterminer une équation de la droite (OA).

2) a) Exprimer, pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0 \; ; \; \pi]$, $u(t)$ en fonction de t.

b) Compléter le graphique numéro 2 de sorte que, dans le plan rapporté au repère $(\mathrm{O}t, \mathrm{O}y)$, il représente le signal u considéré sur l'intervalle $[-\pi \; ; \; 3\pi]$.

3) La valeur moyenne $\overline{u}$ du signal u sur l'intervalle $[-\pi \; ; \; \pi]$ est égale à $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u(t)dt$.

a) Hachurer sur le graphique numéro 2, la portion du plan dont l'aire, exprimée en unités d'aire, est égale à $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u(t)dt$.

b) Vérifier, en utilisant le résultat précédent, que $\overline{u} = \dfrac{\pi}{2}$.

4) On appelle énergie transportée par le signal u sur l'intervalle $[-\pi \; ; \; \pi]$, le nombre $E(u)$ tel que: $E(u) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u(t)dt$.

a) Parmi les deux propositions suivantes, indiquer celle qui est vraie ; justifier la réponse donnée.

Proposition n° 1 « Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[-\pi \; ; \; 0]$, $u(t) = t$ ».

Proposition n° 2 « Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[-\pi \; ; \; 0]$, $u(t) = -t$ ».

b) Vérifier que $E(u) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt$.

c) Donner une fonction primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto t^2$.

d) Calculer la valeur exacte de $E(u)$.

Partie C

On considère le signal polynôme trigonométrique de Fourier d'ordre 1 approximant le signal u. Ce signal, noté V_0, est le signal défini, pour tout nombre réel t, par $V_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos t$.

1) Vérifier que le signal V_0 est pair et périodique de période 2π.

2) La valeur moyenne $\overline{\mathrm{V}_0}$ du signal V_0 sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$ est égale à $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} V_0(t)dt$

En utilisant l'égalité $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(t)dt = 0$, calculer la valeur moyenne de V_0 sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.

3) Les nombres a_0 et a_1 sont des nombres réels. L'énergie transportée sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$ par le signal défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto a_0 + a_1\cos t$ est égale, d'après la relation de Parseval, à $2\pi\left(a_0^2 + \frac{a_1^2}{2}\right)$.

a) Calculer la valeur exacte de l'énergie $E(V_0)$ transportée par le signal V_0 sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.

b) Calculer la valeur arrondie au centième de $\frac{E(V_0)}{E(u)}$ où $E(u)$ est le nombre défini à la partie B question 4.

Partie D

Le nombre k étant un nombre réel, on considère le signal v tel que, pour tout nombre réel t, $v(t) = \frac{\pi}{2} + k\cos t$

1) On note $E(v)$ l'énergie transportée par le signal v sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.

a) En utilisant le rappel effectué à la *partie C* question 3 (relation de Parseval), vérifier que $E(v) = \frac{\pi\left(\pi^2 + 2k^2\right)}{2}$

b) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles $\frac{E(v)}{E(u)} = 1$ ou encore $E(v) = E(u)$.

($E(u)$ est le nombre défini à la *partie B* question 4).

2) L'énergie $E(u - v)$ transportée par le signal $u - v$ sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$ est égale à $\int_{-\pi}^{\pi}\left(u(t) - v(t)\right)^2 dt$. Un calcul, conduit à l'aide d'un logiciel de calcul formel, permet d'écrire que $E\left(u - v\right) = \pi k^2 + 8k + \frac{\pi^3}{6}$.

Indiquer, en utilisant les résultats obtenus à l'exercice 1, pour quelle valeur de k l'énergie $E\left(u - v\right)$ est minimale.

(D'après sujet de Bac Pro M.A.V.E.L.E.C. session 2000)