ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU 1ER ET 2ND ORDRE

I) Équation différentielle du 1er ordre

De nombreuses situations professionnelles ou en sciences physiques aboutissent à la résolution d'une équation différentielle.

1) Qu'est-ce qu'une équation différentielle du 1er ordre ?

Une équation différentielle du 1er ordre est une relation entre une fonction *f* dérivable sur un intervalle et sa dérivée *f'* .

Les équations différentielles du 1er ordre peuvent se mettre sous la forme :

$$f' - a \cdot f = 0 \quad (a \text{ est un nombre réel})$$

L'usage de la lettre y est traditionnellement réservé pour désigner la fonction dans une équation différentielle du 1er ordre, celle-ci s'écrit donc de la façon suivante :

$$y' - a \cdot y = 0 \quad (a \text{ est un nombre réel})$$

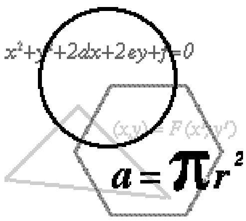
L'ensemble des fonctions qui vérifient la relation $y' - a \cdot y = 0$ sont **fonctions solutions** de cette équation différentielle du 1er ordre.

2) Comment résoudre une équation différentielle de la forme y' – a . y = 0 ?

Pour trouver la solution générale de l'équation différentielle $y' - a \cdot y = 0$ (a étant un nombre réel donné), il faut déterminer l'ensemble des fonctions solutions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto k \cdot e^{a \cdot x}$ (k étant une constante réelle quelconque).

Pour trouver la solution particulière de l'équation différentielle $y' - a \cdot y = 0$ (a étant un nombre réel donné), il faut déterminer **une** des fonctions de la solution générale en donnant une valeur particulière à la constante *k*.

Pour trouver la solution satisfaisant une condition initiale donnée $\left(y(x_0) = y_0\right)$, il faut déterminer *la seule et* unique fonction solution, parmi l'ensemble des fonctions de la solution générale, vérifiant la condition initiale donnée.



II) Équation différentielle du 2nd ordre

Si *f* est une fonction numérique définie et dérivable, sur $\mathbb{R}$, sa dérivée est notée *f '*.
Si *f '* est elle-même dérivable, on note *f ''* sa dérivée appelée dérivée seconde de *f*.

1) Équations différentielles du second ordre

Pour une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et pour laquelle f' (dérivée première) et f'' (dérivée seconde) existent on appelle **équation différentielle du second ordre,** une égalité de la forme : $f''+a\cdot f'+b\cdot f=0$

Remarques : **Résoudre** une telle équation, c'est rechercher **toutes** les **fonctions** *f* qui rendent l'égalité **vraie.**
Comme pour les équations différentielles du premier ordre, on les écrit conventionnellement :

$$y''+a\cdot y'+b\cdot y=0 \quad (y=f \ ; \ y'=f' \ ; \ y''=f'')$$

2) Solutions des équations

La forme des **fonctions solutions** dépend de a et b, et plus précisément des solutions de l'équation d'inconnue r : $r^2+a\cdot r+b=0$ **(équation caractéristique).**

$r^2+a\cdot r+b=0$	Forme des **fonctions solutions**
Si $\Delta<0$ Pas de solutions réelles On pose : $\alpha=-\dfrac{a}{2}$ $\beta=\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}$	**Toute fonction** définie sur $\mathbb{R}$ par : $x\mapsto e^{\alpha\cdot x}\left[A\cdot\cos(\beta x)+B\cdot\sin(\beta x)\right]$ A et B : constantes réelles quelconques. Les solutions peuvent être écrites : $K\cdot e^{\alpha x}\cdot\sin(\beta x+\varphi)$ $K'\cdot e^{\alpha x}\cdot\cos(\beta x+\varphi')$ K et K' constantes positives réelles quelconques φ et φ' constantes réelles quelconques
Si $\Delta=0$ Une solution : r_0	**Toute fonction** définie sur $\mathbb{R}$ par : $x\mapsto(A\cdot x+B)e^{r_0x}$ A et B : constantes réelles quelconques.
Si $\Delta>0$ Deux solutions réelles : r_1 et r_2	**Toute fonction** définie sur $\mathbb{R}$ par : $x\mapsto A\cdot e^{r_1x}+B\cdot e^{r_2x}$ A et B : constantes réelles quelconques