EXERCICES SUR LES FONCTIONS DÉRIVÉES

Exercice 1

Étude de la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 10] par : $f(x) = 2x^2 - 20x + 100$

1) Calculer la fonction dérivée f' de la fonction f :

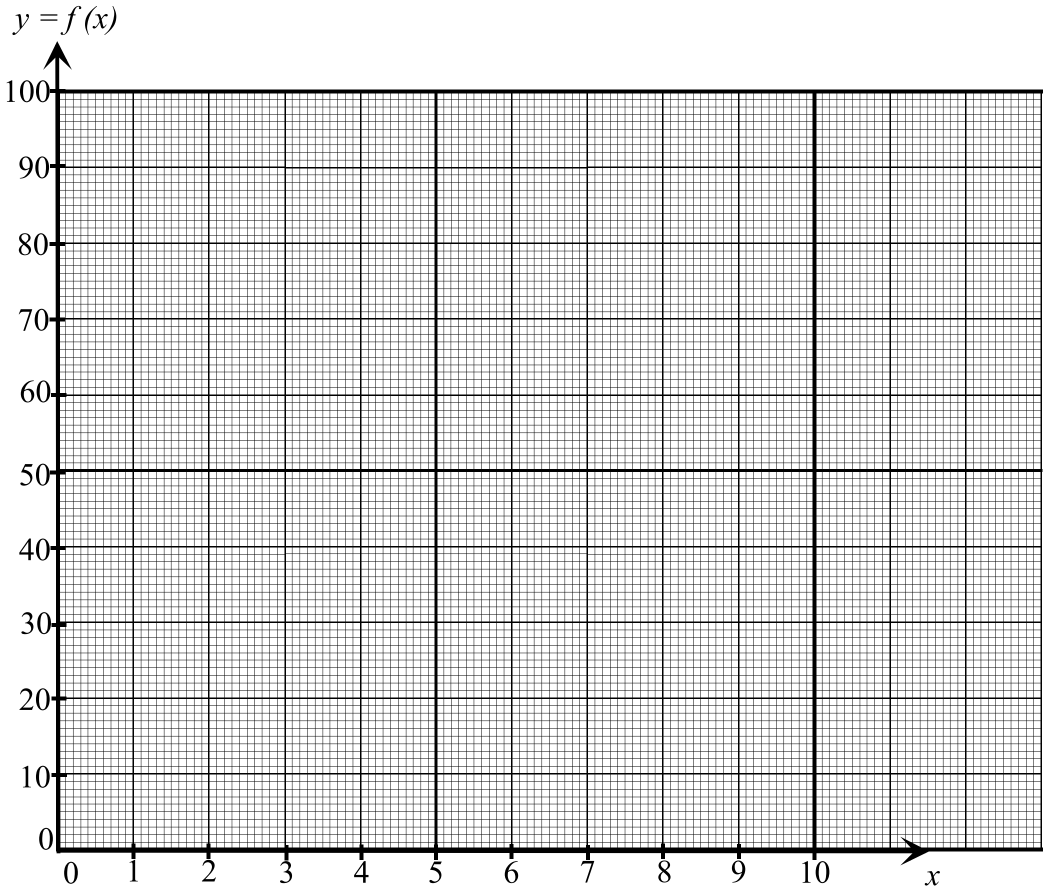
2) Calculer le nombre dérivé $f'(5)$.

3) Établir le tableau de variations de la fonction f.

4) Compléter le tableau de valeurs sur suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$		82	68		52		52	58		82	

5) Tracer la courbe C représentative de la fonction f dans le repère suivant :



(*D'après Bac Pro Artisanat et métiers d'art option vêtements et accessoires de mode Session 1999*)

Exercice 2

Pour fabriquer des pommeaux de levier on utilise une boule sphérique dans laquelle on perce un trou. On étudie le volume des pommeaux obtenus en fonction des rayons.
Soit la fonction *f* définie sur l'intervalle $\left[-1\,;\,2\right]$ par $f\left(x\right) = 4\,x^3 - 6x^2 + 5$.

1) Calculer la fonction dérivée *f* ’de la fonction *f*.

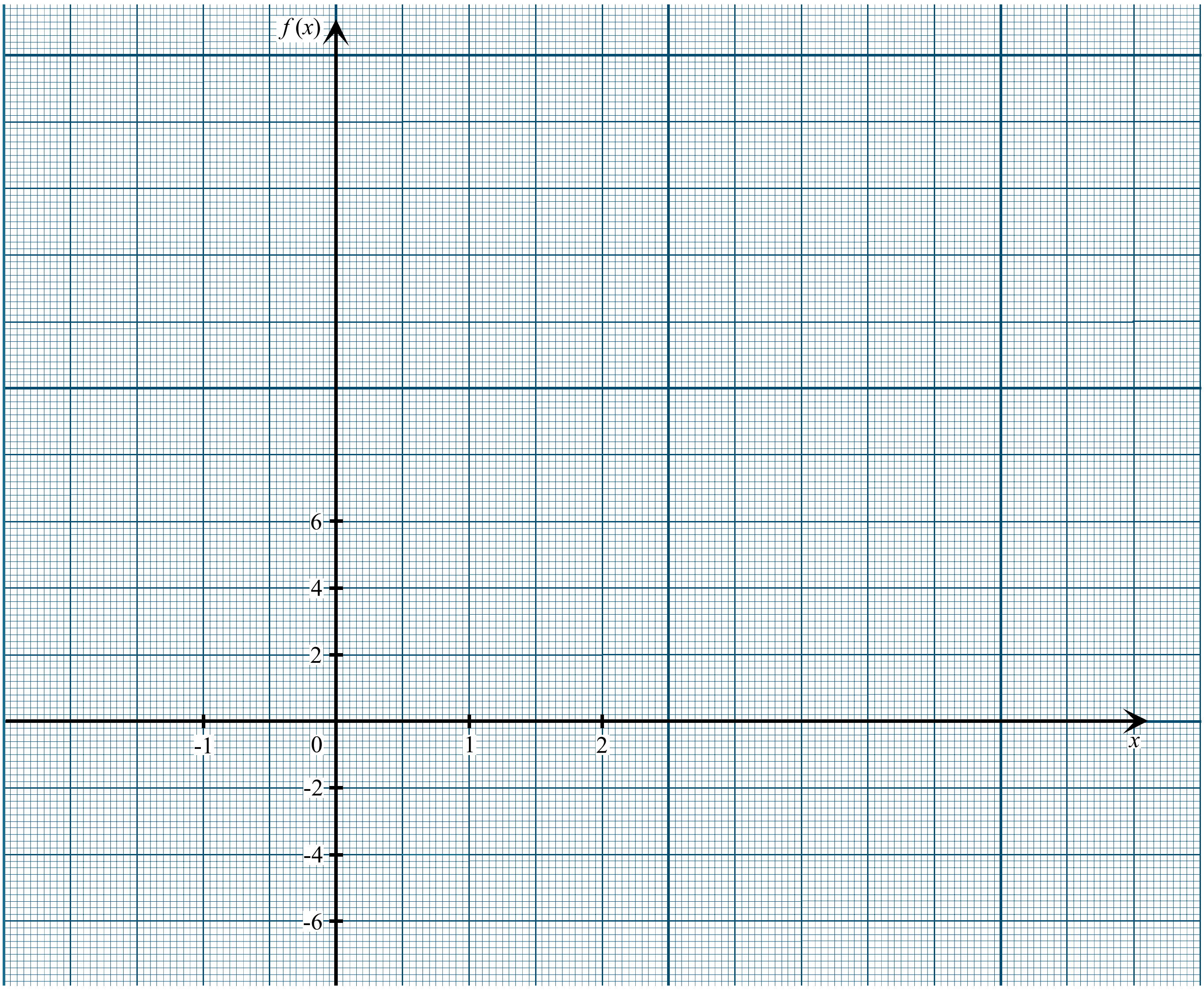
2) Compléter le tableau de variation de la fonction *f*.

x	-1 2
signe de f'	
variation de f	

3) Compléter le tableau de valeurs.

x	-1	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$						

4) Tracer la courbe *C* représentative de la fonction *f*.



5) Le volume V des pommeaux pour des rayons x compris entre 1 et 2 cm est représenté par la partie de la courbe C correspondant.
Déterminer graphiquement la valeur du rayon d'un pommeau de volume 8 cm^3.
Laisser apparents les traits de lecture.

(*D'après sujet Bac Pro MSMA Session septembre 2001*)

Exercice 3

Pour le convoyage d'un aéronef, on monte un réservoir provisoire supplémentaire de volume 6,28 m^3. Ce réservoir cylindrique de rayon R (0,5 m $\leq R \leq$ 1,5 m) et de longueur L doit être réalisé en utilisant le moins de tôle possible.

Le but de l'exercice est donc de déterminer les dimensions du réservoir de façon que l'aire A de la surface de tôle soit minimale. Dans tout le problème, on prendra $\pi = 3{,}14$.

1) Le développement du cylindre donne deux disques et un rectangle. Exprimer

a) l'aire de chaque disque en fonction de R ;

b) l'aire du rectangle en fonction de R et de L ;

c) l'aire totale A en fonction de R et de L ;

d) le volume V en fonction de R et de L.

2) a) Sachant que $V = 6{,}28$ m^3, exprimer L en fonction de R.

b) En déduire l'expression de l'aire totale A de la surface de tôle à utiliser en fonction de R.

3) On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0,5 ; 1,5] par :

$$f(x) = 6{,}28x^2 + \frac{12{,}56}{x}.$$

a) Calculer la dérivée f' de la fonction f puis montrer que $f'(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f'(x) = \frac{12{,}56(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$$

b) Le signe de $f'(x)$ est celui de $(x - 1)$. Donner le signe de $f'(x)$.

c) Établir le tableau de variation de la fonction f.

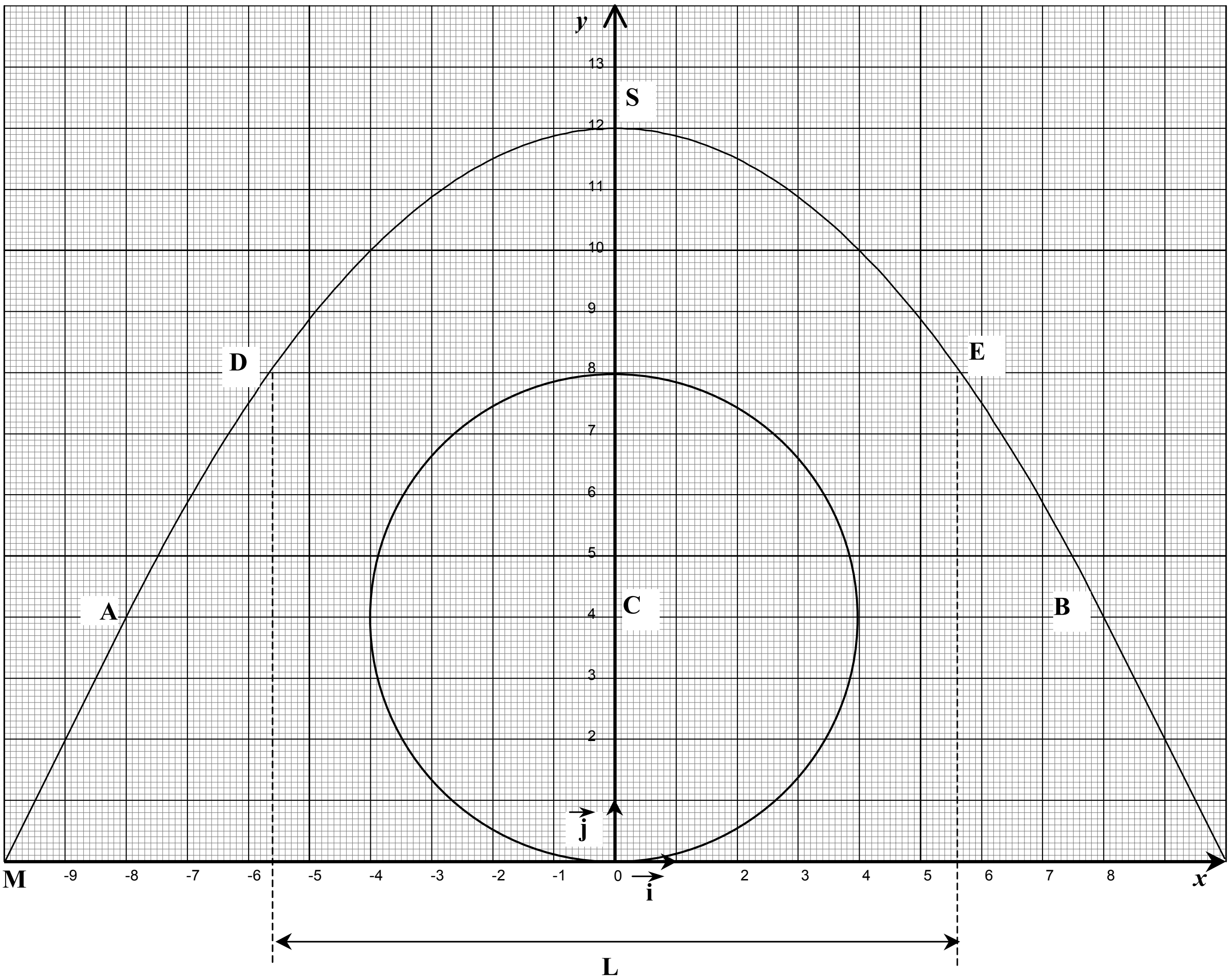
4) a) De la question précédente déduire la valeur de R pour laquelle l'aire A est minimale.

b) Calculer la valeur de L correspondante.

(*D'après sujet de Bac Pro Aéronautique Session 2002*)

Exercice 4

Le schéma suivant représente la coupe d'une pendule rapportée à un repère orthonormal d'unités graphiques le centimètre. L'arc $\overset{\frown}{ASB}$ est un arc parabolique et le cercle de centre C, de rayon 4 cm, représente l'emplacement du cadran horaire. Cette coupe présente une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
Les points A (–8 ; 4), B (8 ; 4) et S (0 ; 12) appartiennent à l'arc de parabole d'équation $y = f(x) = ax^2 + bx + c$.



1) Démontrer que $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 12$.

2) Les points D et E de l'arc $\overset{\frown}{ASB}$ ont pour ordonnées 8.

a) Résoudre l'équation $f(x) = 8$.
b) Trouver les coordonnées de D et E à 0,1 près.
c) Calculer la longueur L du segment [DE].

3) Calculer la dérivée f' de la fonction f. Calculer $f'(-8)$ et donner une équation de la tangente à la courbe au point A.

4) Vérifier que cette tangente passe par le point M de la figure.

(*D'après sujet de Bac Pro Horlogerie Session 2001*)

Exercice 5

Afin de découvrir les raisons possibles d'une panne dans le circuit de refroidissement d'un véhicule type PEUGEOT 406 1,6i., un technicien se propose d'étudier les variations de la résistance de la sonde « température d'eau » en fonction, de la température du liquide dans le circuit de refroidissement. Ces variations sont données par la relation suivante :

$R = 0,58T^2 - 116T + 6\ 000$ T : température en °C
R : résistance de la sonde en Ω

T varie de 0°C à 100°C.

Partie 1

Soit la fonction f, définie sur l'intervalle [0 ; 100] par : $f(x) = 0,58x^2 - 116x + 6\ 000$.
1) Compléter le tableau suivant :

x	0	20	40	60	80	100
$f(x)$	6000			1128		

2) Calculer $f'(x)$ où f' désigne la dérivée de la fonction f.

3) Etudier le signe de $f'(x)$ puis compléter le tableau de variation de la fonction f.

x	0 100
Signe de $f'(x)$	
Sens de variation de f	

4) Tracer la représentation graphique C_f de la fonction f dans le repère suivant.

5) Déterminer une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 50. Tracer cette tangente dans le même repère que C_f.

6) La fonction f admet-elle un minimum ? Si oui, préciser en quel point.

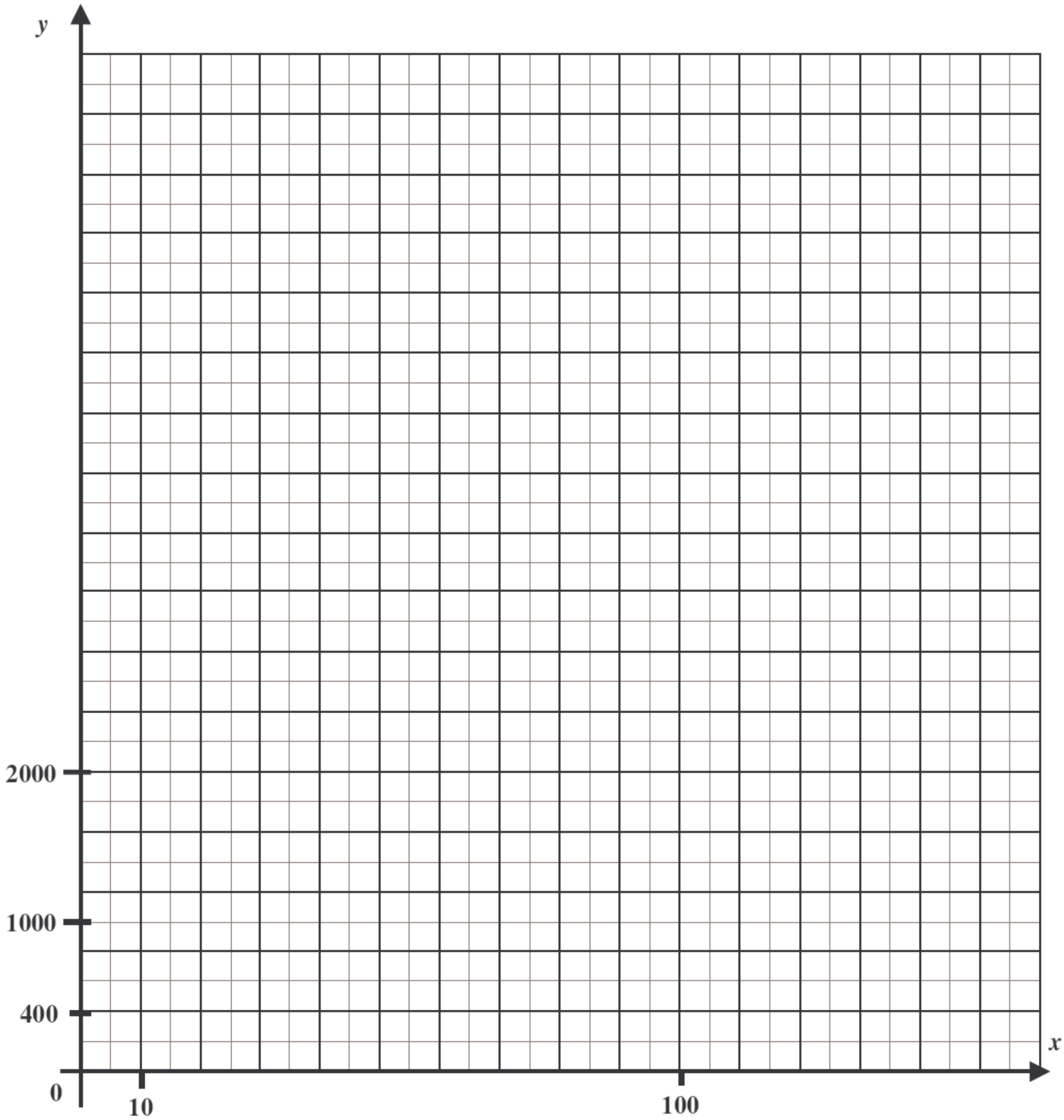
7) Résoudre sur l'intervalle [0 ; 100], l'équation : $f(x) = 2\ 000$
Arrondir la ou les solutions à l'unité.

Partie 2

En utilisant les résultats précédents,

1) Quelle est la valeur minimale que peut mesurer le technicien aux bornes de la sonde de température d'eau ?

2) À quelle température mesurera-t-il une résistance de 2 000 Ω ?



(*D'après Bac Pro Maintenance automobile Session septembre 2003*)

Exercice 6

On admet que la consommation d'essence *C* d'un véhicule est définie par la fonction :

$$C(v) = 0,06v + \frac{150}{v}$$

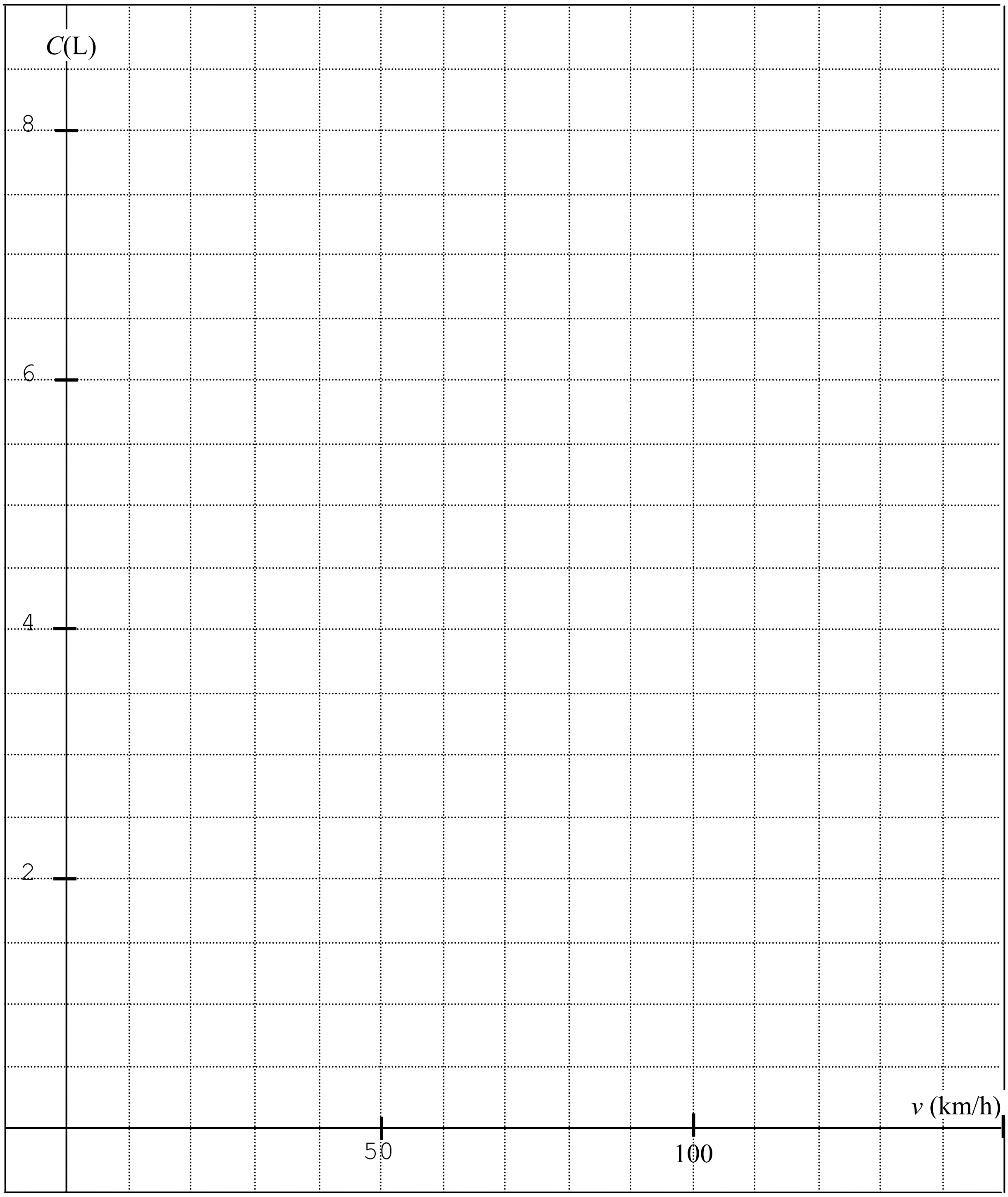
1) Déterminer la fonction dérivée de la fonction *C*, notée *C'* et montrer que *C'*(50) = 0.

2) Représenter le tableau de variation de la fonction *C* sur l'intervalle [20 ; 130].

3) Compléter le tableau de valeurs puis tracer la courbe représentative de la fonction *C*.

v (km/h)	20	30	40	50	80	100	120	130
C (L)					6,675	7,5		

En déduire la vitesse à laquelle il faut rouler pour que la consommation soit minimale ; quelle est cette consommation ?



(*D'après sujet de Bac Pro Maintenance automobile Nouvelle Calédonie Session 2003*)

Exercice 7

I) Soit la fonction *f* définie sur l'intervalle $[10\,;50]$ par $f(x) = 2x^3 - 240x^2 + 7\,200x$.

1) Calculer la fonction dérivée *f '* de la fonction *f*.

2) Vérifier que la fonction dérivée s'écrit $f'(x) = 6\,(x-20)\,(x-60)$.

3) Compléter le tableau des signes suivant :

x	0	10	20	50	60
signe de $(x-20)$			0		
signe de $(x-60)$					0
signe de $(x-20)(x-60)$			0		0
$f'(x) = 6\,(x-20)(x-60)$			0		0

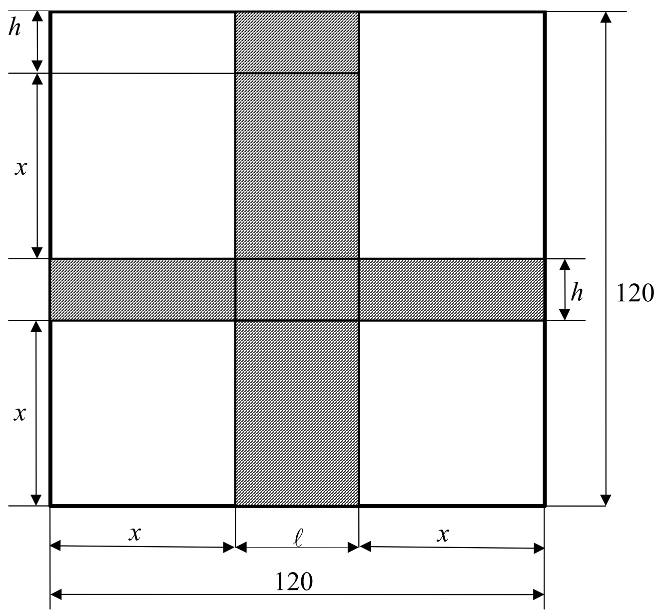
4) Compléter le tableau de variation de la fonction *f*.

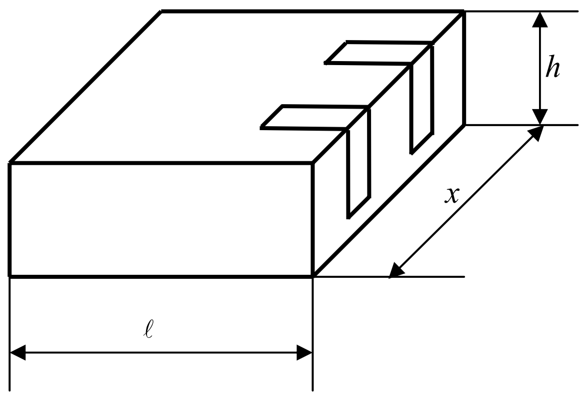
x	10	20	50
signe de f'		0	
variation de f			

5) Compléter le tableau de valeurs de la fonction *f* et tracer, dans le repère, la courbe (*C*) représentant cette fonction.

x	10	20	30	40	50
$f(x)$				32 000	10 000

II) Des lanières servent à la fermeture d'un bagage de forme parallélépipédique. Le patron de ce bagage, représenté en grisé sur le schéma ci-dessous, est découpé dans une pièce carrée de 120 cm de côté.





1) Pour x = 45 cm calculer la largeur ℓ, la hauteur h et le volume V du bagage.

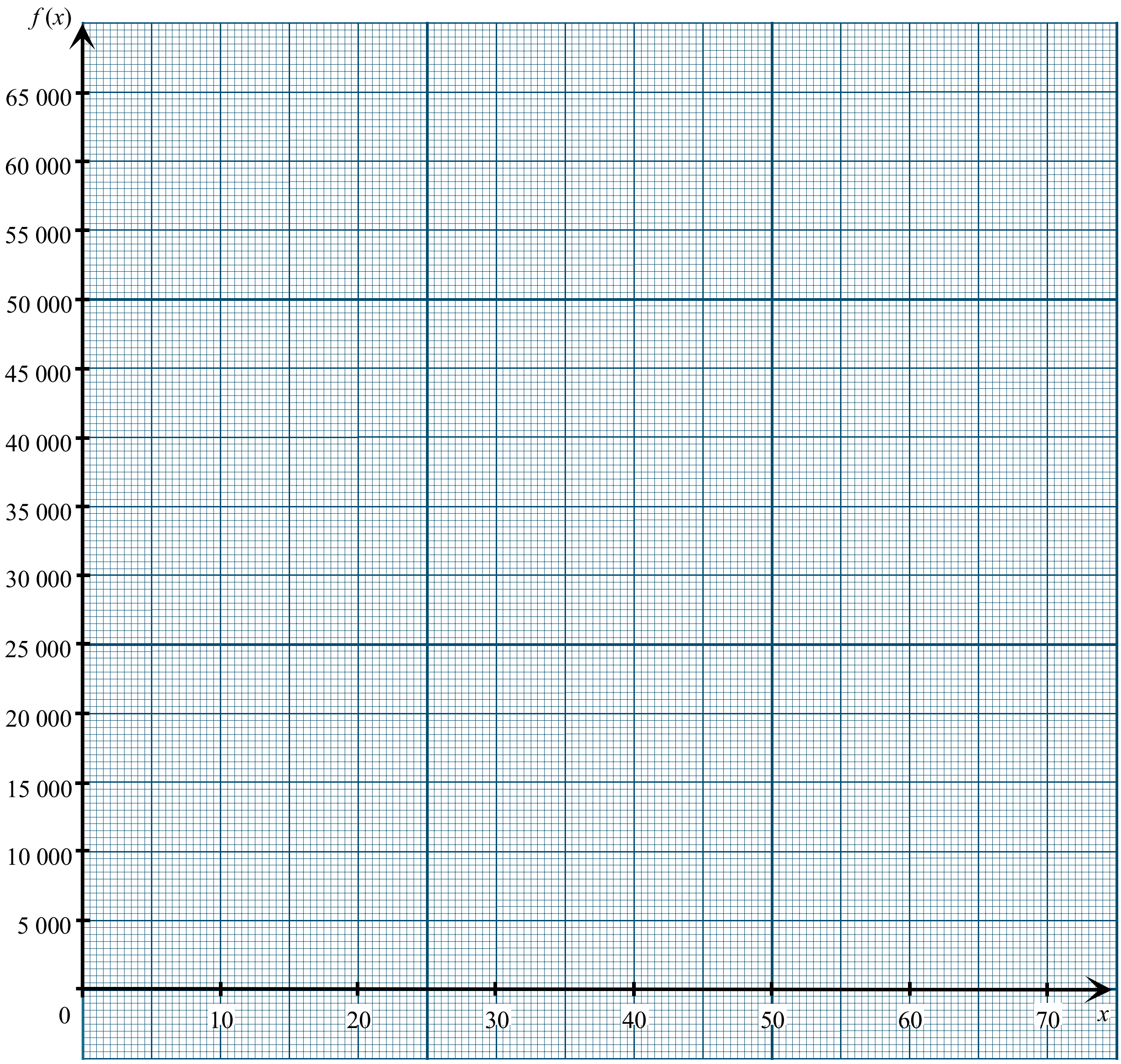
2) Exprimer en fonction de x, la largeur ℓ, la hauteur h et le volume V du bagage.

3) On admet :

- que le volume V, en cm^3 du bagage est donné par la relation $V(x) = 2\,x^3 - 240x^2 + 7\,200x$
- que la courbe (C) obtenue à la question I 5) est la représentation graphique de $V(x)$.

a) Pour quelle valeur de x, le volume V sera maximal ?
Quelle est la valeur V_m de ce volume maximal ?

b) Déterminer graphiquement la valeur de x qui correspond à un volume V = 46 000 cm^3.
Laisser apparents les traits de lecture.



(*D'après Bac Pro Artisanat et métiers d'art option vêtements et accessoires de mode Session 2001*)